

Joan Nelson Marin Watson y Micaela Belén Shtam

joan02marin@gmail.com, micaelashtam2@gmail.com

Sistemas de ecuaciones lineales

Campo de Prácticas, Año 3, N° 1, diciembre 2023

Sección: Artículos, pp. 139-154

ISSN 2118-8787

Sistema de ecuaciones lineales

Resumen

Este trabajo se realiza en el marco de la residencia de Práctica Educativa IV del curso de formación docente para el profesorado de Matemáticas. El objetivo es realizar una investigación sobre cómo definir con precisión sistemas de ecuaciones lineales para su mejor implementación en el aula, logrando un enfoque gráfico y algebraico, observando sus implicaciones, soluciones y aplicaciones. La información obtenida de esta indagación resulta un recurso valioso para la planificación de la propuesta didáctica que se desarrolla en 4to año del Colegio Secundario Edgar Osvaldo Juan Morisoli de nuestra ciudad –Santa Rosa, La Pampa–, con estudiantes del turno de la mañana. Se trabaja en la relación entre los fundamentos matemáticos y los de la Didáctica de la Matemática, los materiales curriculares, las fuentes editoriales y la propuesta de aula implementada. Así, mientras que los argumentos matemáticos marcan posicionamientos de la disciplina, la revisión de trabajos e investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje el objetivo es el de identificar inquietudes, problemáticas y necesidades; desde las fuentes editoriales se describen lógicas, ejercicios y problemas de aula, y los materiales curriculares indican conceptos y teorías a modo de prescripciones y recomendaciones ministeriales de nuestra provincia. Ese marco colabora para explicar y describir decisiones tomadas y momentos en la implementación de la propuesta.

Palabras clave: ecuación lineal, sistemas, representaciones, función, variables en el aula

System of linear equations

Abstract

This work is carried out within the framework of the "Educational Practice IV" residency of the teacher training course for Mathematics teachers; the objective is to carry out an investigation on how to accurately define systems of linear equations for their better implementation in the classroom, achieving a graphic and algebraic approach, observing their implications, solutions and applications. The information obtained from this research is a valuable resource for the planning of the didactic proposal developed in the 4th year of the Edgar Osvaldo Juan Morisoli Secondary School of our city - Santa Rosa, La Pampa -, with students of the morning shift. We work on the relationship between mathematical foundations and those of Didactics of Mathematics, curricular materials, editorial sources and the classroom proposal implemented. Thus, while the mathematical arguments mark positions of the discipline, the review of works and research related to teaching and learning, the objective is to identify concerns, problems and needs; from the editorial sources, logics, exercises and classroom problems are described, and the curricular materials indicate concepts and theories by way of prescriptions and ministerial recommendations of our province. This framework helps to explain and describe decisions made and moments in the implementation of the proposal.

Keywords: linear equations, systems, representations-graph, function, variables in the classroom.

Introducción

El tema en que se centra este escrito son los sistemas de ecuaciones lineales. Poder resolver e interpretar estos sistemas, permite plantear distintos tipos de problemas contextualizados, de interés y utilidad para los estudiantes de secundaria.

Los babilonios fueron los primeros en tratar de darles solución a los sistemas de ecuaciones con procedimientos de eliminación de incógnitas. En el presente, poseemos varios métodos para encontrar el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Durante la residencia pudimos implementar algunos de los mismos, utilizando software que reflejan diferentes características estudiadas.

Como propósito de este trabajo, se profundizará los conocimientos adquiridos durante la formación docente sobre ecuaciones lineales y sistemas de ecuación con un número de dos ecuaciones y dos incógnitas. Se realizó un recorrido por los métodos de resolución, ayudándonos con propuestas captadas desde libros de textos en educación secundaria. Con el fin de poseer las herramientas para llevar adelante la planificación de actividades aplicable durante la residencia.

Se enuncia a continuación los **fundamentos matemáticos** sobre el concepto de sistema de ecuaciones lineales, desde perspectivas de diferentes autores. Definiciones conceptuales y las operaciones que se realizan en torno al tema, que ayudan a pensar y a analizar situaciones desde el punto de vista matemático.

Comenzamos planteando que; *“Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. ... Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. Consideramos x como la “incógnita” de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan soluciones o raíces de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama resolver la ecuación. Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de ecuaciones equivalentes. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo “igual”. El tipo más sencillo de ecuación es una ecuación lineal, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable”* Stewart (2012).

Si analizamos a W. Swokowski (2008) es necesario identificar, qué es un sistema de ecuaciones en general. Y podemos considerarlo de la siguiente manera:

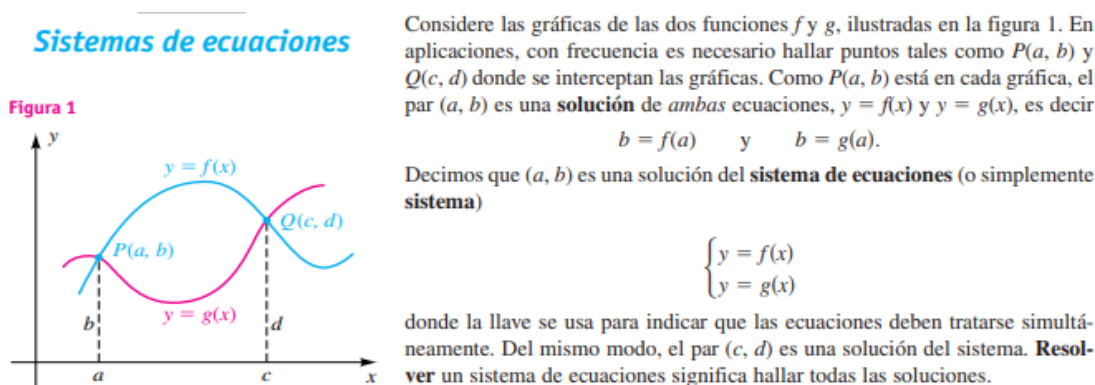


Imagen 1.

Sistema de ecuaciones lineales generales. W. Swokowski (2008)

Donde posteriormente estas curvas generales f y g , tomarán la forma de rectas. Característica esencial de las ecuaciones lineales.

Para encontrar el conjunto de soluciones del sistema, como se mencionaba, puede encararse desde diferentes procedimientos, podemos exponer aquellos que se plasmaron en el aula a la hora de realizar la residencia.

Consideramos la siguiente guía, en el caso concreto, que es de dos ecuaciones con dos variables. Sistema que se trabajó en clase. Dicho método será enunciado como ‘Método de Sustitución’

Directrices para el método de sustitución para dos ecuaciones con dos variables	<ol style="list-style-type: none"> 1 De una de las ecuaciones despeje una variable u en términos de la otra variable v. 2 Sustituya la expresión por u hallada en la directriz 1 en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con v únicamente. 3 Encuentre las soluciones de la ecuación con v obtenida en la directriz 2. 4 Sustituya los valores v hallados en la directriz 3 en la ecuación de la directriz 1 y encuentre los correspondientes valores de u. 5 Compruebe cada par (u, v) hallado en la directriz 4 del sistema dado.
--	---

Imagen 2.

Método de sustitución. W. Swokowski (2008)

Ahora en particular se espera resolver sistemas de dos variables de tipo lineal, esto es. “Una ecuación $ax + by = c$ (o, bien, lo que es equivalente, $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal con dos variables x e y ” W. Swokowski (2008).

Rápidamente podemos citar que desde la lectura y análisis de Stewart (2012) se rescatan las definiciones de métodos para encontrar las soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Mencionamos así mismo el ‘Método gráfico’ el cual consiste en hallar los puntos de intersección de las gráficas. Las soluciones son las coordenadas ‘ x ’ e ‘ y ’ de los puntos de intersección. Stewart (2012)

El tratamiento de este caso sirve con mayor facilidad a aquellos estudiantes que conocen la forma de graficar, o que manejan con facilidad softwares gráficos. Dichos casos hacen que este sea un método rápido y efectivo para determinados problemas.

Para finalizar conceptualizamos el ‘Número de Soluciones’. “Como la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, exactamente uno de los tres casos citados en la tabla siguiente se cumple para cualquier sistema...” W. Swokowski (2008).

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Gráficas	Número de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Número infinito de soluciones	Sistema dependiente y consistente
Rectas paralelas	Sin solución	Sistema inconsistente

Imagen 3.

Número de soluciones. W. Swokowski (2008)

La búsqueda de Fundamentos de didáctica de la matemática otorga formas de presentar y analizar soluciones. La Unidad didáctica citada a continuación, retoma como importante la representación simbólica, gráfica y verbal de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Citamos para integrar miradas que nos parecen más involucradas con los estudiantes, y más oportunas para introducir el tema, y trabajar con el aula, dadas las complejidades presentes en esta el significado de una ecuación de más de una variable, el sentido dentro de los sistemas de ecuaciones, y el comportamiento de los métodos de resolución; para la cual se plantea las siguientes; “Se van a mostrar varias representaciones de los conocimientos pertenecientes a esta Unidad Didáctica. Se distinguen los siguientes tipos de representaciones: simbólica, gráfica, tabular, verbal y manipulativa” Sáez Tarifa (2017-2018)

A fin de no redundar en contenido se reconoce los formatos más habituales como el simbólico, el gráfico, el oral asociado a las situaciones problemas. Para el sistema tabular y manipulativo se ejemplifica con un pequeño desarrollo a continuación.

Representación tabular

“En esta representación de un sistema de ecuaciones se utiliza una tabla de valores para cada una de las ecuaciones lineales con dos incógnitas que conforman el sistema.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$4x + 3y = 1$	
X	Y
-1	5/3
0	1/3
1	-1

$3x - 2y = 5$	
X	Y
-1	-4
0	-2/5
1	-1

A la vista de las tablas, se puede concluir que la solución es el par (1,-1) ya que es el punto donde se cortan las dos rectas que conforman el sistema.

Imagen 4.

Representación tabular. Sáez Tarifa (2017-2018)

Representación manipulativa

“Para explicar un determinado contenido se puede hacer uso de objetos o materiales manipulativos. En esta UD, para comprender y resolver un sistema de ecuaciones donde las dos ecuaciones están iguales se puede hacer uso de una balanza. “Juan tiene el doble de lápices que Laura. Si Juan le da 2 de sus lápices a Laura, entonces tendrán el mismo número de lápices. ¿Cuántos tiene cada uno?” Se representa cada una de las ecuaciones en una balanza independiente que están equilibradas por tratarse de igualdades.”

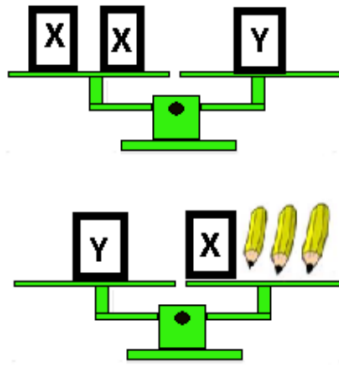


Imagen 5.

Representación manipulativa. Sáez Tarifa (2017-2018)

Para poder acercarse adecuadamente a la enseñanza de un tema es esencial conocer e irrumpir en problemáticas y errores que se suelen cometer de manera usual, o de que se posee registro para no repetirlos de forma inconsciente. Se presentan algunos hallazgos analizando la gran exposición de errores puestos en Sáez Tarifa" (2017-2018), y articulando los mismos con las observaciones de clase, mencionamos entonces, algunos de los mismos, aquellos con los cuales se sostienen la mayoría de las actividades implementadas...

“Dificultad en la comprensión de la dependencia de dos variables.

No distinguir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Dificultades con los cálculos y métodos de resolución.

Conjunto de soluciones. Dar un valor, no un punto.

No entender que la resolución gráfica es otro método de resolución.”

Las formas usuales, para estos temas, de “...enseñanza no les permite a los alumnos partir de elementos concretos para su aprendizaje; esto hace que el tema sea para ellos ocasión de seguir un procedimiento mecánico más que el análisis y significación del concepto de ecuación. Los ejercicios propuestos son descontextualizados y su solución requiere de un alto nivel de abstracción, razones por las cuales son de bajo nivel de motivación... Todo esto se puede atribuir en parte a la falta de manejo significativo del tema.” De Moreno & Castellano (1997). Las Fuentes curriculares nos dicen que en cuanto a la Currícula Oficial, podemos enmarcar las siguientes prescripciones correspondientes a 4° año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria de la Provincia de La Pampa.

Eje: En relación con las funciones y el álgebra. La modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas.

Esto supone:

Modelizar situaciones extra matemáticas e intra matemáticas mediante sistemas de ecuaciones lineales, apelando a transformaciones algebraicas que conserven el conjunto solución de dichos sistemas, interpretando las soluciones en el contexto de la situación.

Analizar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables:

- interpretando la equivalencia de los sistemas que se van obteniendo durante los procesos de resolución analítica y vinculándose con las correspondientes representaciones gráficas obtenidas mediante recursos tecnológicos.

-Vinculando las relaciones entre las posiciones de dos rectas con el conjunto solución de su correspondiente sistema de ecuaciones obtenido mediante resoluciones gráficas y/o analíticas.

Momentos en la propuesta de enseñanza desarrollada en un aula de 4to del ciclo orientado de la Educación secundaria

A continuación, se presentan algunas actividades destacadas del desarrollo de la residencia realizada en el ámbito de la educación secundaria. Estas se originaron a partir de los conceptos fundamentales de los sistemas de ecuaciones, los cuales posibilitaron la reflexión en relación con las fases de estudio de la temática previamente descrita.

Esta actividad “**Muchos vasos**”, con la cual se realiza la apertura, permite repensar las ecuaciones lineales, suponemos para el trabajo que el estudiantado conoce de cursos previos, así mismo permite contextualizar significados de variables y los comportamientos de transposición de términos dentro de la ecuación para obtener expresiones convenientes. Realizando con esta actividad una aproximación necesaria al tema sobre una ecuación lineal de dos variables, contextualizando para motivar la participación de los estudiantes. Moreno & Castellano (1997), insiste en la importancia de dar contexto, motivar y reever condiciones para que el trabajo futuro sea más significativo.

Como objetivos específicos, identificar variables, comprender el sentido de una ecuación con dos variables, y explorar muchas soluciones de forma empírica, interpretando a las mismas, como pares de valores que transforman en válida a una igualdad.

Esta actividad tenía la intención de iniciar el tratamiento de una ecuación con dos variables, estimulando el manejo aritmético, dado que el mismo se presentaba con mucha dificultad en el aula. Así mismo para construir un ambiente más interactivo, que no abrume con las expresiones algebraicas, se trabajó con vasos en formato físico para que puedan ir probando posibles soluciones, estos diferenciados con las iniciales de las marcas, expuestas en el problema, C y F.

Para el trabajo, se separa el curso en dos equipos. A estos se ofrece la consigna expuesta a través de fotocopias:



Por cada vaso de gaseosa C que se quede el 1er equipo, el otro tiene el triple de



vasos de esa gaseosa. Por cada vaso de gaseosa F que se quede el segundo equipo, el primero obtiene el doble de vasos y un adicional fijo de 2 vasos.

Responder

- 1) ¿Cuántos vasos de gaseosa C y F debe quedarse cada grupo, para que tengan en total la misma cantidad? Si encuentran un par de valores anoten los de forma organizada. Para no olvidar las soluciones.
- 2) ¿Cómo podemos escribir en símbolos lo que voy teniendo?
- 3) ¿Pueden escribir de una manera más fácil para obtener las soluciones más rápido?

4) ¿Crees que puedo tomar cualquier cantidad de vasos C y de vasos F y se solucionará el juego? ¿Si elijo una cantidad de uno, la otra siempre está restringida?



Imagen 6.
Representación manipulativa. (vasos)
Aula de clase.

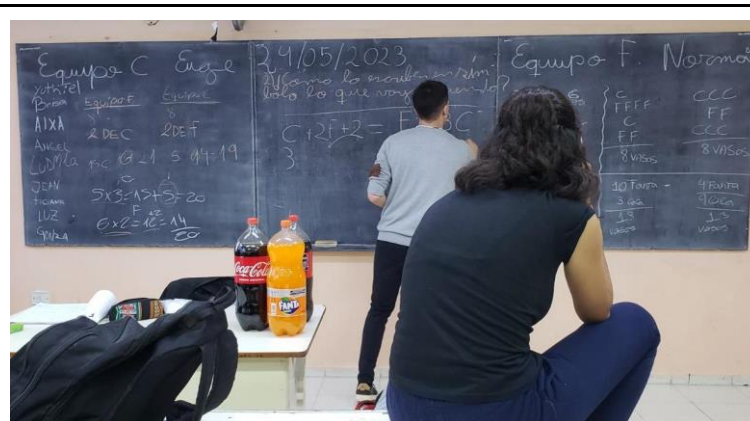


Imagen 7.
Representación intuitiva. Aula de clase

Brevemente se puede mencionar sobre la clase, que fue necesaria muchísima participación del equipo de la práctica, inferimos que fue necesaria porque los estudiantes no estaban acostumbrados a probar ellos resultados, enfrentarse a juegos o actividades diferentes a las guías de ejercicios. El primer acercamiento de lxs jóvenes resultó complejo, luego comenzaron a trabajar y desenvolverse sumamente bien. Se rescata de la imagen (6) la implementación de vasos físicos, distinguidos por color y por las letras C y F, como mediador físico para interpretar la ecuación, su comportamiento y posibilidades dentro de la igualdad, como la representación manipulativa citada Sáez Tarifa (2017-2018). En el pizarrón, dos resoluciones de los alumnos, una correspondiente a cada equipo. Se observa una notación aritmética, lógica, pero inadecuada, la misma proponía ir incrementando las cantidades acorde a las condiciones del problema utilizando, el incremento por 3, ($3 \cdot X$) o el incremento del doble más 2, ($2 \cdot Y + 2$) pero, justamente al remitirse solamente a la parte numérica, utilizaba indistintamente los incrementos para un grupo o para el otro para obtener número iguales, no respetando la “gaseosa seleccionada” con el incremento para “el grupo de esa gaseosa”. (Las escrituras de ambas resoluciones en el pizarrón fueron realizadas por los estudiantes participantes de cada grupo del juego).

Otra resolución, con notación intuitiva y representativa de los objetos que se manejan en el problema. La forma de obtener los resultados aquí implica considerar por pasos cuanto se agrega si agregó una F (o C) a un equipo, cuantas F (o C) se le agrega al otro, e inversamente si agrego las cantidades inicialmente al otro equipo cuanto agrego para el mío. Este procedimiento hasta obtener igualdades. Como 8 vasos por equipo, o 13 vasos por equipo. La notación va avanzando a un modo más general según avanzan en la comprensión y obtención de resultados.

Para profundizar nuestro agrado con la propuesta, fue clara la inclusión de alumnos que se mantenían con un comportamiento apático hacia el conocimiento y para con el grupo de las prácticas en el periodo de observación. A pesar de esto un alumno optó por no participar de la propuesta enunciada como juego. Como conclusiones sobre el contenido, las expresiones

algebraicas fueron sumamente escasas en el principio, se frenó el accionar en el juego y en el tratamiento intuitivo con los objetos. No se logró a grandes rasgos poder formalizar notación pertinente, sobre variables o pares de valores solución. Se observó que en general la transposición de términos no era un manejo natural para ellos y que las estrategias de prueba de valores sobre la ecuación específica tardaron en aparecer.

Para **la clase siguiente**, retomamos las representaciones realizadas en la clase, anteriormente expuesta. Se plasma una guía de preguntas que guían el desarrollo de la clase.

5) ¿Cómo podemos escribir en símbolos lo que voy teniendo?

- Tenemos simbólicamente la expresión en el pizarrón, pensaron la clase anterior que había ‘muchas soluciones’. Vamos a intentar escribir estas soluciones. Si tomamos un valor de C, qué valor de F tenemos que usar.

- Despejamos entre todos la ecuación en el pizarrón. Y probamos con esa encontrar valores al poner un número de C, y tener despejada F.

6) ¿Pueden escribir de una manera más fácil para obtener las soluciones más rápido?

- La manera despejada de $2C-2=F$ Los valores que surgen los ordenamos y probamos si los valores que surgen cumple la primera ecuación. Entonces tenemos ecuaciones equivalentes.

- Escribir la ecuación equivalente. Escribir la tabla de valores.

7) ¿Crees que puedo tomar cualquier cantidad de vasos C y de vasos F y se solucionará el juego? ¿Si elijo una cantidad de uno, la otra siempre está restringida?

Como objetivo, se plantea la necesidad de pasar de la actividad que se desarrolló en contexto de juego, oralidad y prueba-error a la carpeta de los estudiantes. Introducir más matemática a los ojos de los estudiantes, consolidando de forma más clara la notación de igualdad, para las ecuaciones, fijar el uso de dos variables para esa misma ecuación. El significado de cada variable como modelo de objetos distintos de la realidad. Se pretende hacer hincapié en la idea de dependencia de valores de las variables, y de organización con representación tabular. La cual será importante en el desarrollo de las demás clases.

Para continuar es necesario que puedan despejar variables, transponer términos, sea por opuestos aditivos o multiplicativos, e interpretar que, al obtener una variable despejada, puedo considerar los cambios en esta como cambios que dependen de las modificaciones de la otra variable. Por ello era necesario realizar la clase, para poder fortalecer cuestiones importantes.

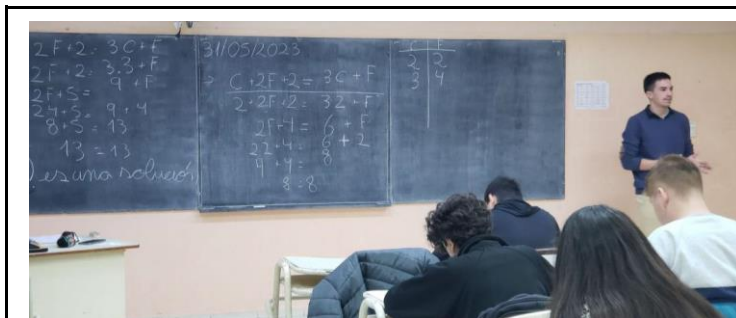


Imagen 8.
Ecuación. Aula de clase

En la pizarra se observan resoluciones de los alumnos. La intención de plasmar igualdades claras para el desarrollo de la ecuación, identificar que es solución dentro de las posibilidades. Se ilustra una tabla de valores, que organiza los resultados obtenidos, como par de valores solución

Reflexionando sobre esto, al intentar realizar un trabajo de carpeta más focalizado, la participación bajó. Fundamental el apuntalamiento y acompañamiento desde la práctica y la propuesta didáctica para que los estudiantes puedan comprender los procedimientos algebraicos e intentar dar un sentido al qué se hace y para qué se hace. Los estudiantes esperan de nosotros resoluciones y consignas directas que luego resolvamos, es muy poco usual dentro de la clase la iniciativa personal de los estudiantes. Es un desafío, notorio en esta clase y que será continuo en toda la práctica, poder mantener a los estudiantes trabajando y dándole sentido al trabajo que realizan, y no esperar proponer actividades, resolverlas y que ellos copien dichas resoluciones.

Para el desarrollo de las actividades posteriores, el objetivo fue consolidar el sistema de ecuaciones resolviendo en primera instancia por la representación tabular.



Imagen 9.
Sistema de ecuaciones. Aula de clase

La imagen muestra cómo se ejemplifica el hallazgo de una “solución para el sistema”. Los pasos al resolver, dichos pasos aplicados sobre un problema que relaciona cantidades continuas, de pesaje en gramos, y el valor monetario de estos. Los pasos aquí expuestos fueron retomados a lo largo de la primera mitad de la residencia, importantes al definir el método de sustitución.

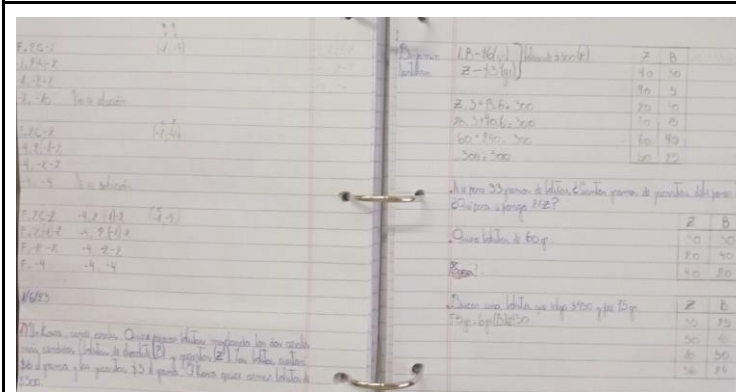


Imagen 10.
Sistema de ecuaciones. Carpeta de estudiante

Se deja registro de una carpeta, donde se pueden apreciar la construcción de tablas de valores y soluciones para cada ecuación. También se observan los primeros avances en el método algebraico expuesto.

Las conclusiones de estas clases apuntan a que queda claro ideas como “soluciones de una ecuación”, “solución del sistema”, como se ubican las ecuaciones dentro del mismo, y la necesidad de simultaneidad de valores dentro de estas. Luego se logró la comprensión del proceso de sustitución y la utilidad del mismo frente a la obtención de soluciones por tabla. Aun así, se presentan varias dificultades respecto a la parte algebraica, que son necesarias trabajar. La guía docente para el proceso de operar con variables es recurrente. Y el proceso de poder construir simbólicamente el sistema de ecuaciones es logrado con éxito generalmente.

Es muy factible que lo ideal sea al menos una clase más donde se trabaje con el proceso, para despejar dudas y ganar independencia.

La residencia continúa apuntando a la construcción algebraica de los sistemas, sus soluciones y los posicionamientos de las rectas.

Juego de soluciones

El objetivo principal es verificar si diferentes pares de números son solución de una de las ecuaciones del sistema.

Poder identificar que cada par de valores que satisfacen una ecuación se van posicionando sobre una recta, por tal motivo queremos que interpreten que las ecuaciones que estamos trabajando son ecuaciones lineales, podemos así llegar a la definición de sistema de ecuaciones lineales.

Se presenta el siguiente sistema

$$2x+3y=23 \quad (A)$$

$$\frac{1}{4}x-y=-4 \quad (B)$$

Dentro de dos bolsas separadas se colocarán fichas con pares de valores que resuelven una de las ecuaciones o no resuelven ninguna.

Bolsa 1	Bolsa 2
L) (-4,3) es solución B	L) (-2,9) es solución de A
O) (-2,3.5) es solución de B	O) (0, 23/3) es solución de A
G) (0,4) es solución de B	G) (1,7) es solución de A
R) (1,4.25) es solución de B	R) (3, 17/3) es solución de A
A) (2,4.5) es solución de B	A) (4,5) es solución de A
S) (4,5) es solución de B	S) (5.5, 4) es solución de A
T) (5,5.25) es solución de B	T) (7,3) es solución de A
E) (7, 23/4) es solución de B	E) (10,1)es solución de A
W) (4,4) no es solución de B	W) (2,6) no es solución de A
X) (7,8) no es solución de B	X) (8,2.5) no es solución de A
Y) (0,2) no es solución de B	Y) (3,6)no es solución de A
Z) (-3,3) no es solución de B	Z) (-1,8) no es solución de A

Tabla 1

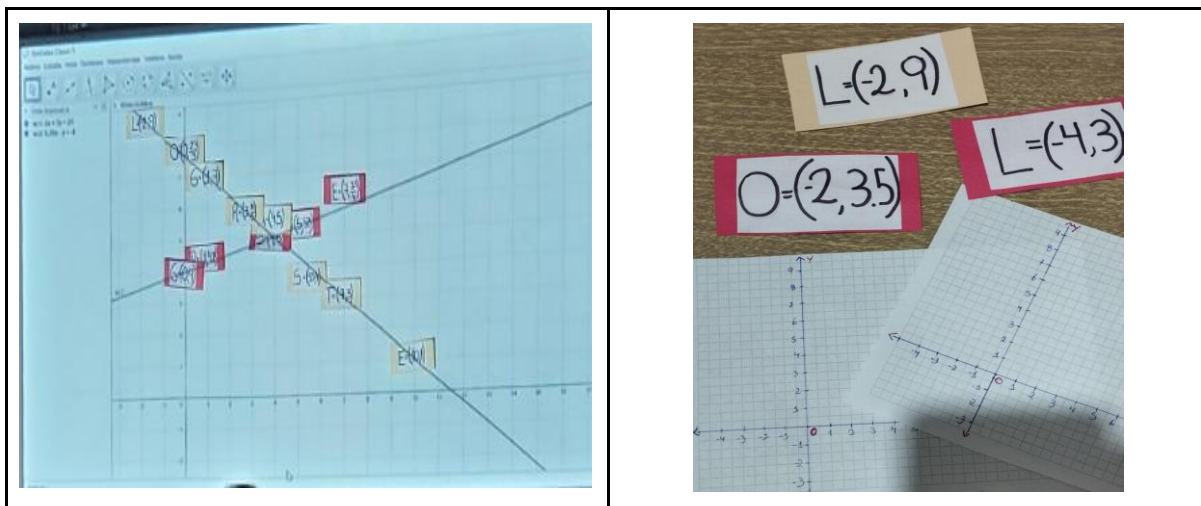


Imagen 11.

Se puede observar como las fichas que contienen pares de valores que son solución de cada una de las ecuaciones del sistema planteado para esta actividad se van posicionando sobre las rectas, que cada alumno fue acomodándolas.

En la resolución de esta actividad volvimos a utilizar objetos físicos manipulables, una propuesta didáctica diferente que con los grupos se logró con éxito la participación. Donde en cada grupo cada uno de los participantes tuvo la oportunidad de probar si era solución y así poder ellos mismo colocarlo en el pizarrón donde se presentó el eje cartesiano. A la hora de colocar en el eje los puntos, se evidenció que nadie sabía cómo hacerlo aunque ellos en años anteriores habían trabajado ecuaciones lineales y cómo graficar, por lo tanto debimos hacer un repaso de cómo colocar cada uno de los puntos, observando los ejes de las abscisas y de las ordenadas.

Actividad

Con esta actividad se busca que los estudiantes realicen el proceso inverso, en lugar de buscar la solución al problema deben inventar rectas que tenga como solución el punto dado. Así los alumnos serán capaces de pasar de un registro a otro.

Se pretende introducir formalmente el método gráfico utilizando geogebra y así puedan utilizar varias herramientas que este software ofrece Colocando puntos en barra de entrada, rectas, y así poder encontrar la solución al sistema.

- 1) Por mutación, un virus está siendo cada vez más fuerte y no alcanza con un solo rayo para vencerlo. Hay que enviarle dos rayos en forma simultánea para que pueda ser reducido.
 - a) En GeoGebra dibujar dos rayos distintos que alcancen el virus que se encuentra en el punto (1,2).
 - b) El virus aparece ahora en el punto (2,3). Una de las fuentes emite un rayo $y=2x-1$, que impacta en el virus; con la herramienta recta que pasa por dos puntos, proponer otro rayo que impacte al virus.
 - c) Supongamos que ahora el virus aparece en el punto (2,1). Cuáles de las siguientes ecuaciones sirven para matar al virus:
 - i) $x - y = 1$
 - iv) $3x - 2y = 4$

- ii) $y=2x - 4$
- iii) $y=1/2x$
- v) $y=2x-1$
- vi) $x- 2y=3$
- vii) $y- x=-1$

d) Ahora se emiten dos rayos hacia un virus en el cual se desconoce su ubicación, las ecuaciones de los rayos son $x + y=12$ y $x-y=2$ Dibuja los rayos y encuentra la ubicación del virus.

Se presentan varias dificultades respecto a la parte de la utilización del software por lo tanto debimos dar unos ejemplos de cómo se deben introducir puntos, rectas, usar la herramienta punto, la herramienta intersección de rectas, que son necesarias para trabajar. Se logró efectivamente la resolución de esta actividad, los estudiantes pudieron realizar el proceso inverso con el que venían trabajando en este caso era buscar la solución al problema.

Actividad

Se pretende que puedan analizar qué relación hay entre las rectas de un sistema. Con el ítem 3) se busca que los alumnos resuelvan los sistemas observando la gráfica. También se espera que logren relacionar cada una de las gráficas, clasificando los sistemas según la cantidad de soluciones que este presenta.

1. Utilicen el programa Geogebra, para graficar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:
 - A) $-2x+3y=-1$
 - B) $x+2y=1$
 - C) $-6x-4y=-7$
 - D) $x-3y=-4$
 - E) $-y+2x=6$
 - $-6x-4y=-7$
 - $2x+5y=0$
 - $3x+2y=-2$
 - $3x-9y=-12$
 - $y-3x=-8$
2. Para cada sistema de ecuaciones graficado, analicen cómo son las rectas entre sí.
3. Resuelvan los sistemas de ecuaciones a través de la gráfica. Indiquen en qué casos pudieron encontrar la solución y en qué casos no pudieron encontrar la solución al sistema.
4. ¿Cómo relacionarían cada solución hallada en el ítem 3 con los gráficos obtenidos en el ítem 2? Clasifiquen las soluciones de cada sistema según las rectas obtenidas.

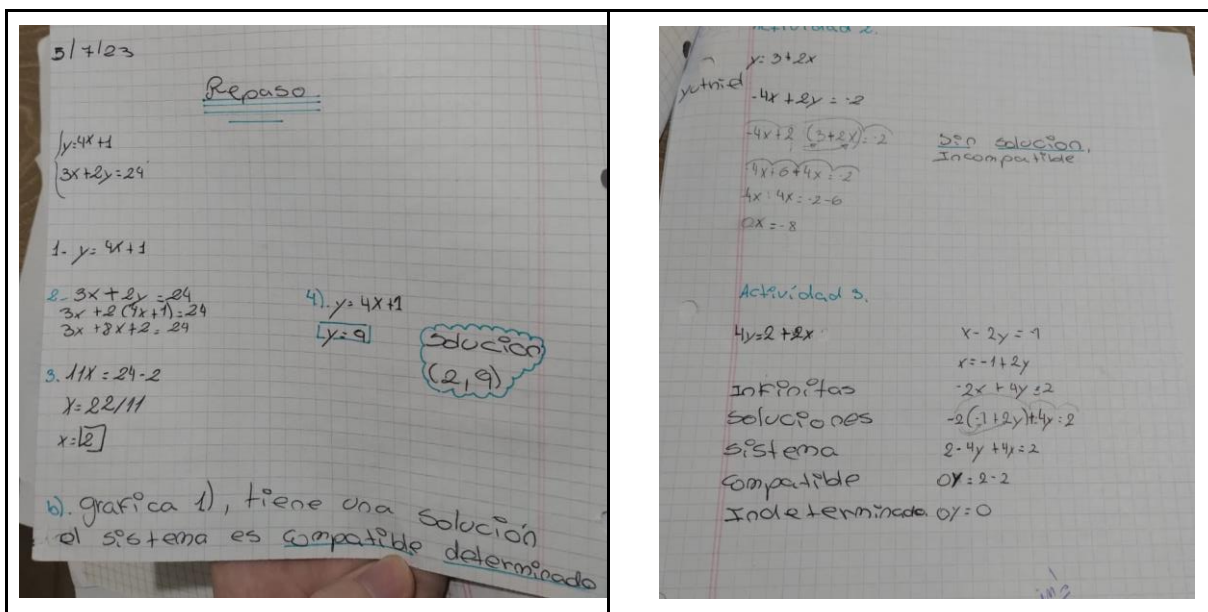


Imagen 12. Registro de una carpeta donde se repasaron contenidos que se estuvo trabajando clases anteriores...

Reflexiones finales

Para concluir el desarrollo de este trabajo, teniendo en cuenta, lo citado por los autores que enuncian los contenidos matemáticos, que da perspectiva sobre la importancia de conocer el contenido que sustenta la planificación, específicamente el trabajo detrás de los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables. Acompañado por el análisis de los autores, que brindan herramientas para considerar los errores que se pueden cometer, las dificultades dentro de la enseñanza y formas de presentar el contenido, pudimos implementar propuestas que permitían jugar entre los modos estructurados y pocos reflexivos que manejaban los estudiantes, y una conducta que los independice y les permita hacer propio los saberes básicos que se plasman en las aulas.

Nuestro análisis culmina esbozando que los errores que proponen varios autores, se siguen plasmando dentro de las guías de ejercicios, es el caso de solo enunciar contenidos y luego dar guías de ejercitación, utilizando los problemas como aplicación o cierre de las propuestas, y alejándose de los saberes contextualizados y significativos para los chicos.

Intentaremos a partir de estas consideraciones desarrollar una práctica conjunta a la planificación de actividades, que involucre a los estudiantes motivándolos en la mayor medida que podamos, incluyendo a los más relegados del curso. Es por ello que se comienza trabajando con una ecuación de dos variables, interpretando soluciones, ecuaciones equivalentes a esta, y el comportamiento de las variables dentro de esta ecuación, remitiendo ideas de independencia de variables y representaciones de una ecuación y traducciones al lenguaje simbólico. Para posteriormente trabajar las ideas de simultaneidad dentro de un sistema, poder definirlo como tal y trabajar sobre las particularidades del tema. Así mismo con mediadores digitales poder reinterpretar nociones de rectas en el plano asociadas a estos sistemas de ecuaciones lineales. Sin dejar de lado el álgebra que sustenta las operaciones que se van realizando.

Por último, en cuanto a cómo se trabajó en el aula se pudo constatar que al comienzo cuando propusimos actividades totalmente distintas a cómo trabajan habitualmente hubo tensiones y dificultades, pero no obstante, mientras se iba desarrollando y entendiendo la actividad propuesta, comenzaban a animarse a trabajar, aunque las intervenciones nuestras siempre estuvieran presentes para guiarlos a la resolución.

Esta práctica, nos deja sumamente felices, al poder llevar a cabo una propuesta que incluyó efectivamente a los estudiantes, en tanto participación activa, y poder demostrar el manejo mínimo del conocimiento, incluso aquellos con dificultades particulares. Así mismo resaltamos la importancia de una práctica docente que se involucre en imaginar sus dificultades, atender su individualidad, y poder explotar el espíritu de jugar e involucrarse en desafíos que puedan alcanzar los estudiantes. Debemos seguir aprendiendo, al igual e incluso más que los estudiantes de hoy en día, puesto que la docencia es un desafío constante y único.

Bibliografía

Alejandro Sáez Tarifa (2017-2018) Unidad Didáctica: Sistema de ecuaciones (2º ESO). Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Especialidad en Matemáticas. Universidad de Granada.
Acceso en [Alejandro Sáez Tarifa \(2017-2018\)](#)

De Moreno, I., & Castellano, L. D. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado. *Revista EMA*, 2(3), 247. 247-258
Acceso en [Moreno, I., & Castellano, L. D. \(1997\)](#)

Buenas Tareas (2015), Ensayo, Historia De Los Sistemas De Ecuaciones Lineales
Acceso en [Buenas Tareas \(2015\)](#)

Libro digital Entre números IV / Juan Mendoza... [et al.]. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana, 2018. Libro digital, HTML

Gobierno de La Pampa. Ministerio de Cultura y Educación. Subsecretaría de Coordinación (2013). *Materiales Curriculares de Matemática: Ciclo Orientado de la Educación Secundaria*.
Acceso en [Materiales Curriculares](#)

Earl W. Swokowski (2008) Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12da edición.
Earl W. Swokowski.

Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson (2012) Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.

Jose Eulalio Arreguín Pérez (2000). Matemáticas cuaderno de ejercicios 3 . Larousse.

Altman, S.; Comparatore, C. y Firbank, V. (2001). Masmate 7 EGB. Buenos Aires, Colihue.