Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Andrés Capozzi y Manuela Cavallo
acapozzi17@gmail.com, manuu.cavallo@gmail.com
Encuadrados
Campo de Prácticas, Año 3, Nº 1, diciembre 2023.
Sección: Artículos, pp. 124-138
ISSN 2118-8787

EnCuadrados

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo indagar y explicitar los distintos fundamentos vinculados a conceptualizaciones de ecuación y función cuadrática, con la finalidad de enriquecer una propuesta de enseñanza y aprendizaje implementada en un curso de 5°año de la Educación Secundaria de nuestra provincia. Se presenta un estudio de los conocimientos y argumentos matemáticos que fundamentan la temática, y un análisis didáctico en el que se desarrolla perspectivas, problemáticas, y necesidades referidas a la enseñanza de ecuaciones y funciones cuadráticas. Se analiza la importancia y las limitaciones de trabajar tanto en un sistema algebraico como uno gráfico, sin embargo, se concluye que trabajar con situaciones problemáticas propios de la geometría, dota de mayor sentido a lo abstracto de lo algebraico
Para complementar este trabajo se anexan momentos de enseñanza dentro de la experiencia de residencia, los cuales dan lugar a la reflexión sobre las decisiones incorporadas a partir del recorrido y revisión bibliográfica.

Palabras clave: cuadráticas, ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas.

In Squares

Abstract

This work aims to investigate and explain the different foundations linked to conceptualizations of equation and quadratic function, with the purpose of enriching a teaching and learning proposal implemented in a 5th year course of Secondary Education in our province. A study of the mathematical knowledge and arguments that underpin the topic is presented, and a didactic analysis in which perspectives, problems, and needs related to the teaching of equations and quadratic functions are developed. The importance and limitations of working in both an algebraic and graphic system are analyzed; however, it is concluded that working with

problematic situations specific to geometry gives greater meaning to the abstract of the algebraic.
To complement this work, teaching moments are attached within the residency experience, which give rise to reflection on the decisions incorporated from the tour and bibliographic review.

Keywords: quadratics, quadratic equations, quadratic functions.

Momentos en la propuesta implementada, sus fundamentos y prescripción curricular

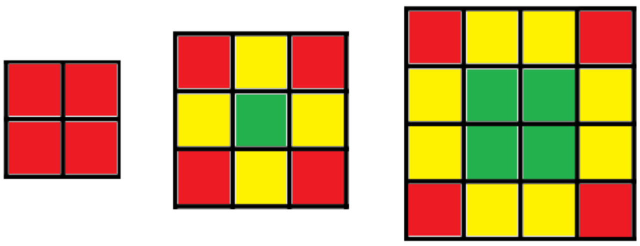
En este artículo se enumeran distintos momentos de esta propuesta de enseñanza y aprendizaje, explicitando fundamentos matemáticos, como también los fundamentos didácticos, problemáticas y observaciones que se han puesto en juego al momento de construir y llevar a cabo esta propuesta dentro del aula. Para ello se tienen presentes los estudios y trabajos de Illuzi y Sessa (2014), Lozano y Córdoba (2013), Vázquez y Mordones (2019) y Camacho Tobar (2019) como parte de los fundamentos didácticos. Por otro lado, los fundamentos matemáticos se extraen de Zill y Dewar (2012), Swokowski y Cole (2009), Stewart et al. (2007).

Esta propuesta de enseñanza y aprendizaje se lleva a cabo en un curso de 5° año de educación secundaria, la cual se alinea con el currículo oficial. Este en principio enmarca los contenidos y prescripciones, vinculados a ecuaciones y funciones cuadráticas, en el 4° año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria de la Provincia de La Pampa, y en 5° año del mismo ciclo, considerando a la Función cuadrática como un caso particular de Función Polinómica, cuando el grado de la misma es igual a 2.

Momento 1: *Cuadraditos*

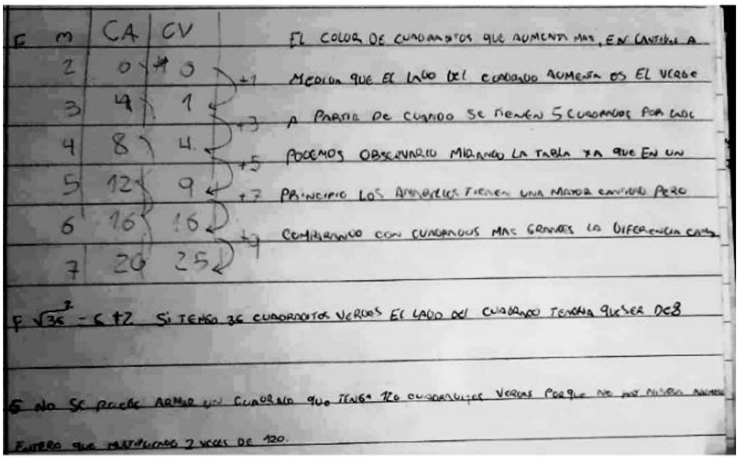
Illuzi y Sessa (2014) sostienen que la resolución de distintos problemas dará sentido al trabajo algebraico, y que para ello, son necesarias actividades introductorias que generen la necesidad del mismo, como las de conteo o problemas geométricos. En esta línea, se hace introducción al tema mediante una actividad que tiene como objetivo iniciar el estudio de las expresiones cuadráticas por medio de la modelización de una situación de conteo. Por otra parte, tiene como propósito que los estudiantes puedan comparar y diferenciar crecimientos constantes, lineales y cuadráticos.

Enunciado: En un cuadrado cuadriculado se pintan de rojo las esquinas. A medida que el cuadrado aumenta su tamaño, como se muestra la imagen, los cuadraditos que van quedando en el interior se pintan de verde, y los que quedan en el borde, excepto las esquinas, se pintan de amarillo.

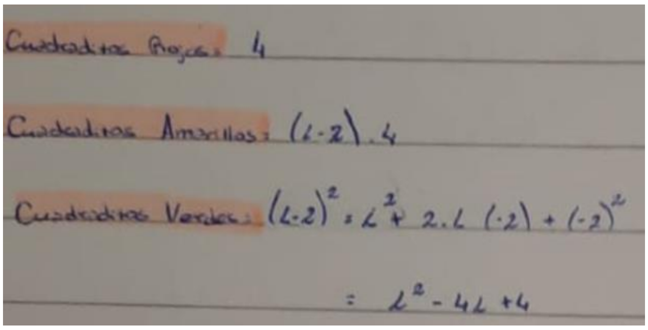


A partir de preguntas guías, se pueden destacar algunos interrogantes que tenían como objetivo generalizar la situación: ¿Cuántos cuadraditos de cada color habría si el cuadrado tiene *n* cuadraditos de lado?, ¿Qué color de cuadraditos aumenta más, en cantidad, a medida que el lado del cuadrado aumenta?, ¿Cómo podrías justificarlo? Si tengo 36 cuadraditos verdes ¿de cuánto tendría que ser el lado del cuadrado?

Durante el proceso de resolución, los estudiantes comprendieron fácilmente el problema y pudieron hipotetizar cuántos cuadraditos de colores había en un cuadrado de 50 cuadraditos de lado. Esto les permitió generalizar el resultado para cuadrados de cualquier tamaño de lado "*n*". Sin embargo, surgieron dificultades al abstraer la cuantificación en una expresión. Se guío a los estudiantes para definir una variable "*n*" que represente la cantidad de cuadraditos por lado y usarla en una expresión que cuantifique los cuadraditos de cada color. Los estudiantes encontraron dos formas de modelar la situación: una interpretación geométrica y otra basada en sustracción. Se verificó si ambas expresiones contaban correctamente los cuadraditos verdes, demostrando que eran equivalentes, y sólo se desarrolló la expresión factorizada.



Resolución 1



Resolución 2

Se concluyó que, al contar cosas, las cantidades pueden no ser lineales, y dependiendo del valor de la variable independiente, la cantidad total (en este caso, cuadraditos verdes) puede modelarse con una expresión cuadrática y por lo tanto su crecimiento es cuadrático.

En esta actividad se logró institucionalizar el crecimiento cuadrático y las expresiones cuadráticas, donde se trabajó, implícitamente, alrededor del concepto de función cuadrática y ecuación cuadrática. A continuación, se presentan algunos de los ***fundamentos matemáticos*** asociados a estas conceptualizaciones:

Los dos conceptos mencionados comparten una relación estrecha, donde la <u>ecuación</u> es “una condición que se impone sobre el dominio de una función, pone en juego la idea de variable, por sobre una idea más estática de incógnita” (Illuzi & Sessa, 2014).

Antes de presentar el análisis recabado, se presenta como cada autor seleccionado define ecuaciones cuadráticas:

“Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + x = 0$ donde $a \neq 0$” (Swokowski y Cole, 2009, p.81)	“Una ecuación cuadrática es una ecuación polinomial que puede escribirse en la forma estándar: $ax^2 + bx + x = 0$ con $a \neq 0$ “ (Zill y Dewar, 2012, p. 127)	“Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + x = 0$ donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$” (Stewart et al., 2007, p.47)

Por otro lado, Zill y Dewar (2012) detallan que una ecuación cuadrática particularmente es una ecuación polinomial, pero considerando que el grado del polinomio es 2 y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación polinomial se llaman raíces de la ecuación.
Los autores seleccionados, además, concuerdan, con lo que respecta a la metodología para encontrar las soluciones, la factorización y la propiedad del producto nulo o teorema del factor cero de los números reales, juegan un rol fundamental.
Por otro lado, concuerdan que:
- si no está el término lineal en la ecuación, se puede, o es conveniente, resolver la ecuación factorizando la expresión utilizando diferencia de cuadrados, que únicamente mencionan el método Zill y Dewar (2012).
- en caso de que no falte ningún término y el coeficiente cuadrático es uno, se completa cuadrado y lo que se suma miembro a miembro, como dice Swokowski y Cole, (2009) y Stewart et al. (2007) es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
Por último, los autores nombrados, presentan la fórmula cuadrática que con ella se puede resolver cualquier tipo de ecuación de grado 2.

Teorema 3.3.1 Raíces de una ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Zill y Dewar, 2012, p. 131)

Los tres autores concuerdan en llamarlas raíces de la ecuación, y concluyen que se puede discriminar la cantidad de valores que asume x. Por otra parte, Swokowski y Cole (2009) definen una raíz de multiplicidad 2 a aquellas raíces reales que son iguales.

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	Naturaleza de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y desiguales
0	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

(Swokowski y Cole, 2009, p.85)

Discriminante	Raíces
i) $b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
ii) $b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales pero iguales
iii) $b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

(Zill y Dewar, 2012, p. 131)

En cuanto a función cuadrática, todos los autores coinciden en la definición proporcionada, con la diferencia que Zill y Dewar, (2012) introducen el concepto como un caso particular de las funciones polinómicas.

Introducción Cuando n es un entero no negativo, la función potencia $f(x) = x^n$ es sólo un caso especial de una clase de funciones llamadas **funciones polinomiales**. Una función polinomial tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (1)$$

donde n es un entero no negativo. Las tres funciones consideradas en esta sección, $f(x) = a_0$, $f(x) = a_1x + a_0$ y $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ son funciones polinomiales. En las definiciones que siguen cambiamos los coeficientes de estas funciones por símbolos más convenientes.

(Zill y Dewar, 2012, p. 218)

Por otra parte, se observa que todos los libros, no solamente los analizados, utilizan la misma simbología para denotar los coeficientes que acompañan a cada término, esto se debe a la relación directa con las ecuaciones cuadráticas y la fórmula cuadrática.

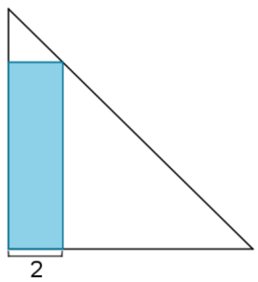
Definición de función cuadrática	Una función f es **función cuadrática** si $$f(x) = ax^2 + bx + c,$$ donde a, b, y c son números reales con $a \neq 0$.

(Swokowski y Cole, 2009, p.213)

Momento 2: ***Rectángulo inscrito en triángulo***

Para avanzar en el análisis de la función cuadrática, se introdujo una situación geométrica, lo cual es afín a la idea de Illuzi y Sessa (2012) vinculada al inicio del trabajo con funciones.

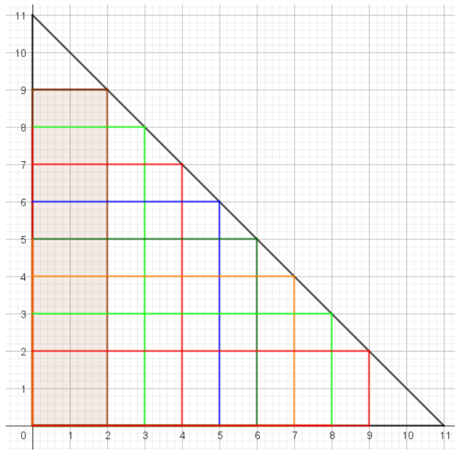
En la construcción de este momento se valoró el estudio de Lozano y Córdoba (2013), quienes expresan que dentro del aula hay preeminencia de actividades de tratamiento en el contexto algebraico, mientras que las representaciones gráficas se presentan como complemento de las anteriores. Hitt (2003) agrega que "hay dificultades en profesores y estudiantes, y la causa principal es la consideración y tratamiento de las funciones cuadráticas desde un registro imperante sobre los demás, el algebraico, lo cual produce una limitación en su comprensión". Es por ello que se consideró una actividad que trabaja y complementa varios registros al mismo tiempo, donde los estudiantes debían vincular un problema geométrico con su esquema, una tabla, expresión y gráfica, analizando e identificando relaciones entre las mismas, hallando e interpretando los puntos estratégicos en la gráfica y al mismo tiempo haciendo correspondencia con la expresión algebraica.



Enunciado: Se tiene un triángulo isósceles rectángulo, cuyos catetos miden 11 cm. Considerar y graficar los rectángulos que se pueden dibujar dentro de la figura de la siguiente manera: deben ser rectángulos con dos lados apoyados en los catetos del triángulo y un vértice en la hipotenusa.

A partir del enunciado, la primera parte de la actividad se centra en una serie de interrogantes que impulsan al estudiante a analizar la situación mediante un esquema, concluyendo una relación expresada de forma algebraica, en la cual aparece el término cuadrático. Las preguntas realizadas eran del tipo: "¿cuál es el área del rectángulo de base 2? ¿Hay otro rectángulo de igual área? ¿Qué sucede con la altura a medida que la base crece? ¿Qué relación hay entre la altura y la base del rectángulo? ¿Qué relación hay entre la base y el área del rectángulo?".

Los estudiantes contaban con un esquema de situación para graficar los distintos rectángulos que se adaptan a las condiciones del problema. Algunos notaron de esta manera que el rectángulo de base 9 cm es igual al de base 2 cm, pero con las medidas de base y altura invertidas. Otros alumnos, mediante el diagrama, notaron que algunos rectángulos tienen mayor área, ya que en su interior contenían más cuadraditos, y que el sobrante de la altura es igual a la base del rectángulo.



Modelo de esquema de la situación

Luego, para responder las relaciones entre la altura-base y área-base, surgieron algunas dificultades. Los estudiantes captaron estas relaciones a partir del análisis del esquema, pero el obstáculo yacía en expresar esas relaciones en forma algebraica, lo cual parece ser un dificultad general entre estudiantes de nivel medio, puesto que en la investigación de Camacho Tobar (2019), se detalla que algunos de los problemas con respecto al concepto de función se deben al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran los símbolos, expresiones algebraicas y a su vez la dependencia entre variables.

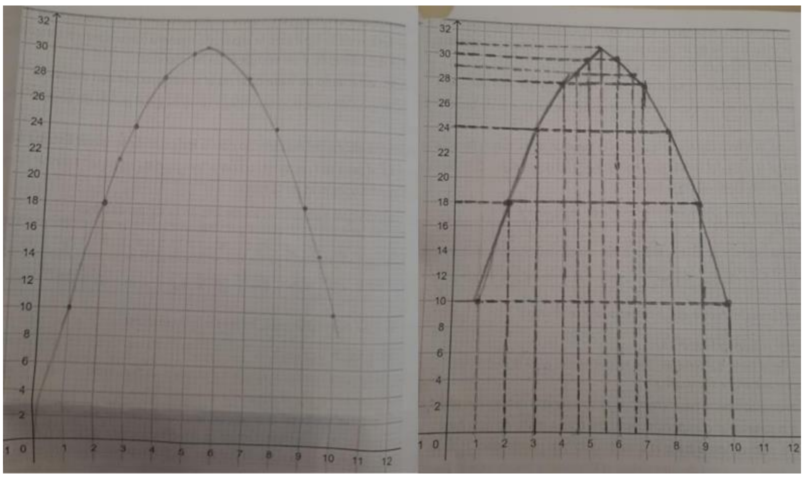
En la segunda parte de la actividad, se propuso la construcción de una tabla de valores y el gráfico, para realizar una correspondencia entre ambos e interpretar la situación a partir de todos los registros construidos (tabla, gráfica, expresión algebraica), con el fin de identificar algunos puntos estratégicos y características de la función.

2) Organizar con información que consideres necesaria en la siguiente tabla

Base (*cm*)	1	2	2,5	3	4	5	5,5	6	7	8	9	9,5	10
Área (cm^2)	10	18	21,5	24	28	30	30,25	30	28	24	18	14,25	10

Tabla de estudiante: Área en función de base.

La casilla vacía entre el 5 y el 6 fue útil para que los estudiantes identifiquen el vértice de la función, puesto que 5,5 es la medida del lado del rectángulo con mayor área que se puede construir, y en particular este es un cuadrado. A partir de los datos volcados en la tabla, se construyó la gráfica:



Véase que para completar la tabla y realizar la gráfica los estudiantes deben considerar qué medidas de la base son válidas en este contexto. Por ejemplo, si consideran el 12, se debe plantear si es correcto considerar una base de 12 cm, la cual debe está contenida en un cateto de 11cm, es decir que intuitivamente deben analizar el Dominio.

Para concluir características de la función se plantearon una serie de interrogantes que fueron analizados a partir de todos los registros construidos: "¿Para qué valor de la base se obtiene el área más grande? ¿Cuál es esa área máxima? ¿Qué punto representaría en la gráfica?", "A medida que la longitud de la base crece, ¿qué sucede con el área del rectángulo? ¿crece o decrece?", **"**¿Para qué valor, o valores, de la base el área es cero? ¿Se puede identificar en la gráfica?".

Con estas preguntas los estudiantes identificaron rápidamente que la función tiene un vértice, el cual representa el área más grande que puede tener este tipo de rectángulo, y lograron observar que a medida que la base crece hasta los 5.5 cm, el área crece, pero que pasando los 5.5 cm el área decrece. También interpretaron los valores de la base que anulan al área, haciendo correspondencia en la gráfica con las ya conocidas "raíces" de una función.

En conclusión, esta situación fue oportuna para abordar varias de las características de una función cuadrática a partir de una situación geométrica.

Momento 3: ***Áreas y cuadrados***

La siguiente actividad tiene por objetivo construir como saber la expresión canónica de la función cuadrática. Para adentrarnos en este tema, haremos revisión de algunos ***fundamentos matemáticos*** vinculados a esta conceptualización:

El análisis de la expresión canónica de las funciones de segundo grado, en la bibliografía utilizada se ofrece como "puerta de entrada", debido a que esta expresión ofrece una claridad conceptual en el sentido de que se puede comprender como los coeficientes de la ecuación afectan la forma y el movimiento de la parábola.

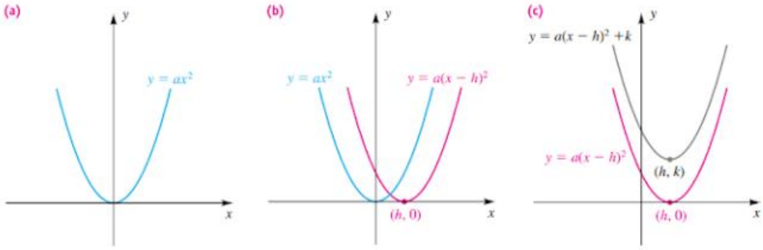
Los autores Zill y Dewar (2012) y también Stewart et al. (2007), mencionan que si se considera $a = 1$ y $b = c = 0$, entonces se obtiene la función cuadrática simple $f(x) = x^2$. Pero Swokowski y Cole (2009), consideran que la ecuación básica es $y = ax^2$. Bajo estos supuestos, los primeros autores coinciden en que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es transformación de la gráfica de $y = x^2$, mientras que los últimos, aseguran que $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede obtener por desplazamientos vertical y/u horizontal de la gráfica $y = ax^2$. Además, todos los autores en análisis coinciden en que la gráfica que describe $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

Swokowski y Cole (2009) consideran los efectos de transformación que aplica el coeficiente cuadrático a, haciendo alusión a la concavidad de la función:

> Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen (0, 0), un eje vertical, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (vea, por ejemplo, las figuras 4 y 5 de la Sección 3.5). En esta sección demostramos que la gráfica de una ecuación de la forma
>
> $$y = ax^2 + bx + c$$

Swokowski y Cole (2009)

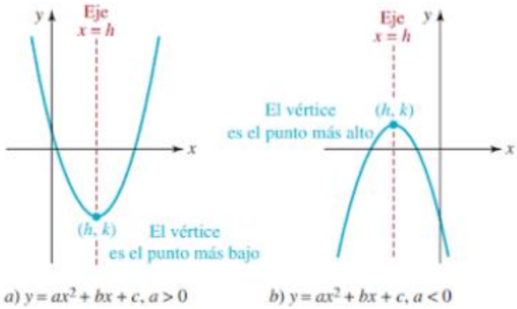
Los últimos autores mencionados, junto a Zill y Dewar (2012), coinciden en que al completar cuadrado en $f(x) = ax^2 + bx + c$, se va a cambiar la forma de la función a $f(x) = a(x-h)^2 + k$, siendo $k, h \in \mathbb{R}$. Describen brevemente los desplazamientos horizontales y verticales en $|h|$ y $|k|$ unidades respectivamente, y según el signo de estos. Esto último, nos inspiró para construir esta actividad, donde se plantea una comparación de los desplazamientos de la función al variar los valores que corresponden a los parámetros k y h.



(Swokowski y Cole, 2009, p. 215)

En cuanto a h y k, los autores en análisis indican que el punto (h, k), que lo llaman vértice, es el punto más bajo (alto) en la parábola si $a > 0$ ($a < 0$), y por lo tanto f tiene un valor mínimo (máximo) en $f(h) = k$, y esto se debe a que la parábola abre hacia arriba o hacia abajo según el signo de a.

Los autores indican que la recta $x = h$ es el eje vertical (Swokowski y Cole, 2009) o eje de simetría (Zill y Dewar, 2012) de la parábola.



(Zill y Dewar, 2012, p. 219)

En relación al valor mínimo o máximo que alcanza la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, los autores coinciden en que se alcanza en $x = -\frac{b}{2a}$. Por otro lado, demuestran que $k = c - \frac{b^2}{4a}$, siendo estas conclusiones resultado de completar cuadrado en $f(x) = ax^2 + bx + c$. Además, recomiendan no memorizar el valor de k, puesto que se puede hallar calculando $f(h)$ que sería calcular $f(-\frac{b}{2a})$.

Por lo tanto concluyen que dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se puede encontrar $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f(-\frac{b}{2a})$.

Teorema para localizar el vértice de una parábola	El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene coordenada x $-\frac{b}{2a}$.

(Swokowski y Cole, 2009, 217)

Teorema sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática | Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es

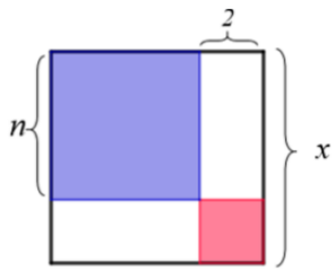
(1) el valor máximo de f si $a < 0$

(2) el valor mínimo de f si $a > 0$

(Swokowski y Cole, 2009, 218)

La decisión de construir el concepto de la expresión canónica de una función de segundo grado proviene de la importancia de considerar distintas posibilidades de representación de estas conceptualizaciones, puesto que cada tipo de representación evidencia ciertas propiedades de los objetos que representa, al mismo tiempo que deja de lado otras (Lozano y Córdoba, 2013). En esta línea, Illuzi y Sessa (2014) expresan que las diferentes escrituras de la fórmula cuadrática, puestas en relación con las características del gráfico cartesiano, enriquecen el sentido de ambas formas de representación de las funciones.

Esta actividad también se introduce a partir de un problema geométrico, y se realiza un análisis en GeoGebra, vinculando la variación de los gráficos a medida que varía la expresión algebraica-canónica de la función. Se decidió no partir directamente de una representación algebraica de esta expresión, como se acostumbra habitualmente en clases de matemática, puesto que, coincidiendo con Lozano y Córdoba, el nivel de abstracción que la caracteriza puede ser un inconveniente para su comprensión. Mientras que, al sistema gráfico, lo describen como limitado, argumentando que sólo permite visualizar una parte de lo expresado en el álgebra, pero que posibilita la formación de representaciones con una apariencia menos formal, más atractiva y posiblemente más amigable para los alumnos. En síntesis, a partir de un problema geométrico se construyó la expresión canónica combinando el análisis gráfico y algebraico, observando los distintos desplazamientos de la gráfica y permitiendo que los alumnos reconozcan en forma autónoma las relaciones entre la fórmula canónica y la gráfica de una función cuadrática.



***Enunciado*. 1.** Escribir una expresión *A1* que permita calcular el área del cuadrado grande de contorno negro, en función de x.

2. Escribir una expresión *A2* que permita calcular el área del cuadrado azul, en función de x.

3. Escribir una expresión *A3* que permita calcular el área total del cuadrado azul y rojo, en función de x.

4. ¿Para qué valor/valores de x, el área $A3$ es nula?

5. Graficar, en GeoGebra, las funciones $A1(x)$, $A2(x)$, $A3(x)$.

6. ¿Cuáles son los vértices de cada gráfica?

7. En las siguientes preguntas observar el desplazamiento y vértices de las gráficas:

> **a)** ¿Qué relación gráfica existe entre $A1$ y $A2$? $A2$ con respecto a $A1$ se desplaza ____ unidades hacia ____________.
>
> **b)** ¿Qué relación gráfica existe entre $A2$ y $A3$? $A3$ con respecto a $A2$ se desplaza ____ unidades hacia ____________.
>
> **c)** ¿Qué relación gráfica existe entre $A1$ y $A3$? $A3$ con respecto a $A1$ se desplaza ____ unidades hacia ____________ y _____ unidades hacia _______________.

8. ¿Qué nos dicen las expresiones acerca de los desplazamientos y las gráficas?

En la resolución de la actividad, los estudiantes tuvieron algunas dificultades y errores en los primeros incisos, donde se deben construir expresiones algebraicas, lo cual reafirma lo expresado por González-Martín y Camacho (2005): “Se observa la preponderancia del pensamiento algebraico en los alumnos. Aunque el registro algebraico ocasiona grandes dificultades a veces, es el que están acostumbrados a usar”. Los estudiantes graficaron las tres expresiones haciendo uso del software GeoGebra, donde no tenían manejo ni conocimiento previo del mismo, pero a pesar de ello no tuvieron inconvenientes para realizar las gráficas, y completaron la actividad de forma correcta. Finalmente se realizó un intercambio, “jugando con el software” mediante expresiones dadas para comparar gráficas, vértices y sus formas canónicas, logrando institucionalizar la expresión canónica de una función cuadrática. Una de las problemáticas que los autores anteriores identifican en relación a estas conceptualizaciones, es cuando los puntos representativos de la parábola no son vinculados a la expresión algebraica y viceversa, donde el docente emplea diferentes registros sin especificar la conversión o paso de uno al otro. En la implementación de esta actividad se buscó evitar este tipo de problemática, por ello se vincularon el registro gráfico y analítico, para luego desarrollar los distintos pasajes de un registro hacia otro.

Momento 4: Tutti frutti cuadrático

Esta actividad tiene por objetivo reforzar los saberes y relaciones construidos durante toda la propuesta, es decir que se propuso al final de la misma, y permitió elaborar evidencia de aprendizaje para realizar una evaluación. La tarea se realizó en grupos y en un contexto lúdico de socialización.

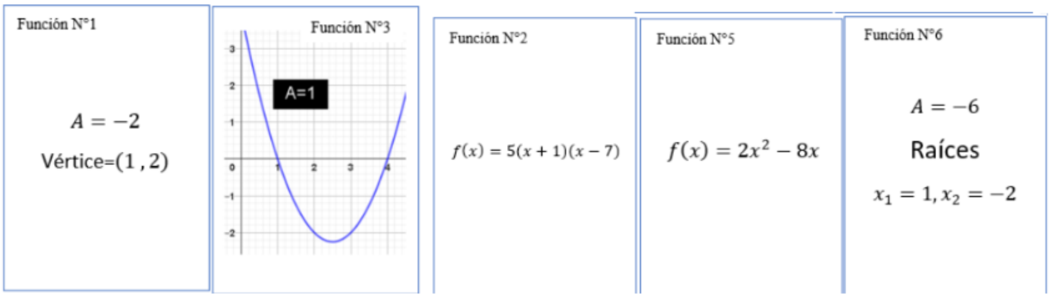
Enunciado: La actividad se realiza en grupos de 2/3 integrantes. A cada grupo se le entrega un mazo de 10 cartas, y a cada estudiante una tabla de tutti frutti donde las categorías están vinculadas a funciones cuadráticas. Cada participante debe sacar una carta, y con los datos de la misma completar los casilleros de la tabla.

Cuando se termina una ronda, los participantes deben corregirse entre sí, y en caso de dudas de corrección deben llamar al docente. Según la cantidad de casilleros completados, cada estudiante sumará una cantidad de puntos que se adicionará a una suma total, de donde sale un ganador.

N° Carta	**Expresión polinómica**	**Expresión canónica**	**Expresión factorizada**	**Raíz/Raíces**	**Vértice**	**Concavidad**

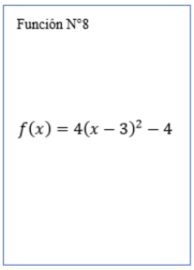
Tabla tutti-frutti

Las cartas sustituyen al abecedario del juego tradicional, y cada carta contiene información de una función cuadrática (puntos estratégicos, expresión factorizada, expresión canónica, coeficiente principal). Con esta información, los estudiantes deben hallar otras características y/o expresiones de la función para completar las categorías de la tabla.

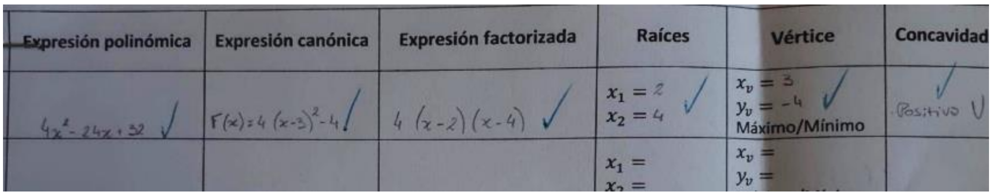


Cartas

El tiempo en el que se llevó a cabo la actividad permitió que los alumnos completaran una o dos filas de la tabla. A continuación, se presenta la producción de un estudiante que tenía la carta N°8:



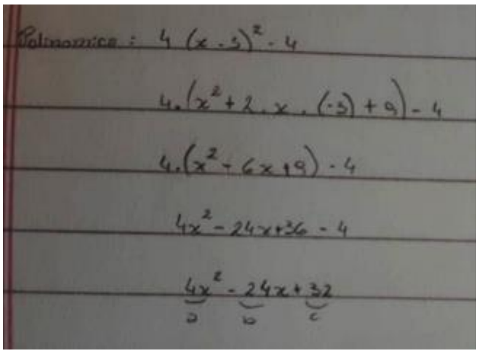
Carta N°8



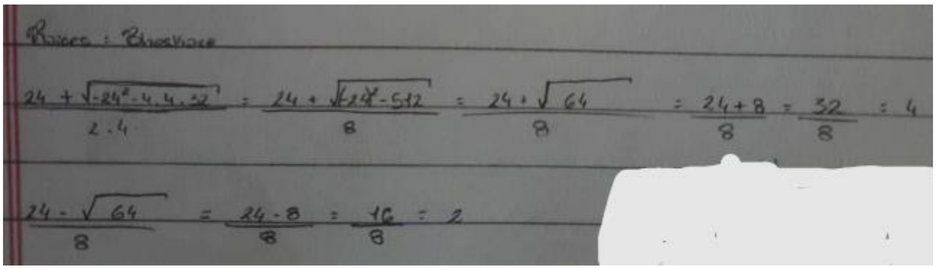
Expresión polinómica	Expresión canónica	Expresión factorizada	Raíces	Vértice	Concavidad
$4x^2 - 24x + 32$ ✓	$F(x) = 4(x-3)^2 - 4$ ✓	$4(x-2)(x-4)$ ✓	$x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ✓	$x_v = 3$, $y_v = -4$ ✓ Máximo/Mínimo	Positivo ✓
			$x_1 =$, $x_2 =$	$x_v =$, $y_v =$	

Tabla completada por estudiante

La carta contenia la expresión canonica de la función, con ello el estudiante pudo advertir la concavidad y el vértice. Desarrollando la expresión (binomio cuadrado y distributiva) hallo la formula polinomica de la funcion, y a partir de la misma concluyo las raices y la expresión factorizada, haciendo uso de la formula de Bhaskara.



Desarrollo algebraico, pasaje de expresión Canónica-Polinómica



Raíces mediante Bhaskara.

Finalmente estas producciones (tablas y desarrollos algebraicos) fueron parte de las evidencias de evaluación, debido a que la actividad planteada evidencia y enriquece la puesta en relación de las conceptualizaciones abordadas en la propuesta, adhiriendo a Lozano y Córdoba (2013) quienes expresan que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo dentro de un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar actividades de conversión de una representación a otra. En este caso, eso se hace evidente cuando se construyen las funciones a partir de datos algebraicos y/o gráficos suficientes, y se logran expresar en sus distintas formas de escritura algebraica.

Véase que en esta actividad se incluye la expresión factorizada de la función cuadrática, la cual no se desarrolla en este artículo, pero fue presentada durante la propuesta a partir de las ecuaciones cuadráticas. Se toma como parte de los fundamentos matemáticos de la expresión factorizada el "Teorema de la Factorización Completa", extraído de Zill y Dewar (2012), quienes particularmente ejemplifican que se puede factorizar una expresión cuadrática calculando sus raíces. El enunciado del Teorema, que es aplicado a polinomios, y la especificación en expresiones cuadráticas se puede ver en la siguiente imagen:

Teorema 6.3.3 Teorema de la factorización completa

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de la función polinomial de grado $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Entonces, $f(x)$ se puede escribir como un producto de n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n). \quad (6)$$

(Zill y Dewar, 2012, p. 284)

Podemos ver que estos autores enuncian que la forma factorizada de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)$, siendo c_1 y c_2 las raíces de la misma.

Reflexiones finales

Es necesario reconocer la importancia de la investigación en la formulación de esta propuesta, puesto que nos aportó información acerca del orden de construcción de las conceptualizaciones y nos permitió fundamentar las lógicas del orden de los conceptos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. También, nos dejó dilucidar con anticipación algunos obstáculos y problemáticas que pueden surgir entorno a funciones y ecuaciones cuadráticas dentro del aula.

Por otra parte, en esta experiencia encontramos como enriquecedor trabajar en lo cuadrático mediante dos sistemas, algebraico y el gráfico, integrando con igual jerarquía ambos sistemas de representación, puesto que cada uno de ellos destaca características de las funciones y ecuaciones cuadráticas, que el otro deja de lado.

Además, es importante reconocer lo provechoso de fomentar la resolución de problemas geométricos, o de conteo, que dan sentido al trabajo algebraico y permiten construir nuevos saberes y relaciones matemáticas, lo cual indujo a este grupo de estudiantes a tener distintos tipos de razonamiento, como el crítico, reflexivo y argumentativo que proveen de un aprendizaje más significativo en cada uno de los momentos desarrollados en este estudio.

Final de la residencia, PEIV-5°año de Económicas, Colegio 9 de julio

Bibliografía

Camacho Tobar, J. (2019). La función cuadrática desde el enfoque del aprendizaje basado en proyectos. Universidad del Valle.

Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y, Morales y A, Ramírez (Eds.) I CEMACYC, Congreso de Educación Matemática de America Central y El Caribe. Santo Domingo, Republica Dominicana: CEMACYC.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Illuzi, A., Sessa, C. (2014). Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. Ministerio de Educación. CABA, Argentina.

Itzcovich, H., Novembre, A. (2018). M2- Matemática 2. Editorial Tinta fresca.

Stewart, J.,Redlin, L., Watson, S. (2007). Precálculo: matemática para el cálculo. CENGAGE learning (5ta edición). México, D.F.

Swokowski, E., Cole, J. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning Editores. México, D.F.

Vásquez F., Mardones, L. (s.f.). El lenguaje matemático y la unidad de enseñanza potencialmente significativa: una propuesta didáctica para la enseñanza de la función cuadrática [Trabajo de seminario]. Universidad de Concepción, Facultad de Educación, Pedagogía en Matemática y Computación.

Zill. D & Dewar J. (2012). Algebra, trigonometría y geometría analítica. Mc Graw Hill, México, D.F.