
CKBOXING

Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Celeste Ailin Loureyro

ailinloureyro1999@gmail.com

Funciones polinómicas, ¿qué surge del producto de las funciones lineales?

Campo de Prácticas, Año 3, Nº 1, diciembre 2023

Sección: Artículos, pp. 93-107

ISSN 2118-8787

Funciones polinómicas, ¿qué surge del producto de las funciones lineales?

Resumen

El presente documento tiene como propósito central abordar los fundamentos de las funciones polinómicas y proponer un enfoque didáctico efectivo para su enseñanza, a partir de un análisis detallado de materiales especializados en la materia. Para lograrlo, se realiza una revisión de diversos libros de autores matemáticos destacados, con el objetivo de extraer definiciones precisas, aplicaciones prácticas, propiedades y formas de presentación de las funciones polinómicas. Asimismo, se lleva a cabo un análisis didáctico y editorial de la matemática desde diversas perspectivas, y se hace referencia a distintos trabajos que aportan información relevante para mejorar la enseñanza de estas funciones. Completa la presentación un recorrido descriptivo de actividades en aula de secundario de una secuencia de trabajo elaborada a partir de aquél estudio inicial.

Palabras clave: polinomios, funciones polinómicas, análisis matemático, didáctico y editorial, propuesta de enseñanza

Polynomial functions, what arises from the product of linear functions?

Abstract

The main purpose of this paper is to address the fundamentals of polynomial functions and to propose an effective didactic approach for their teaching, based on a detailed analysis of specialized materials on the subject. To achieve this, a review of several books by prominent mathematical authors is carried out, with the aim of extracting precise definitions, practical applications, properties and forms of presentation of polynomial functions. Likewise, a didactic and editorial analysis of mathematics from different perspectives is carried out, and reference is made to different works that provide relevant information to improve the teaching of these functions. The presentation is completed by a descriptive tour of activities in secondary school classrooms of a work sequence elaborated from that initial study.

Keywords: polynomials, polynomial functions, mathematical analysis, didactics and publishing, teaching proposal

Fundamentos Matemáticos

En este escrito se exponen los fundamentos matemáticos vinculados a conceptualizaciones de las Funciones Polinomiales desde distintas perspectivas de diversos autores. Se analizan estos conceptos desde un enfoque matemático y luego se realiza una comparativa para tomar decisiones respecto a la relevancia de la información, resultado de la investigación llevada a cabo. A continuación, podemos analizar diferentes definiciones para función polinómica recuperadas de los libros de Stewart (2012) y en el de Zill & Dewar (2012):

Definición 6.1.1 Función polinomial

Una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ y a_0 son constantes reales y n es un entero no negativo.

Imagen 1: Función polinomial (Zill & Dewar, 2012, p. 266)

FUNCIONES POLINOMIALES

Una función polinomial de grado *n* es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes del polinomio.**

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante.**

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal.**

Imagen 2: Funciones Polinomiales (Stewart, 2012, p. 232)

En la **Imagen 1** aclara como condición que los coeficientes deben ser números reales y *n* un entero no negativo, mientras que en **Imagen 2** no aclara a qué campo numérico pertenecen los coeficientes.

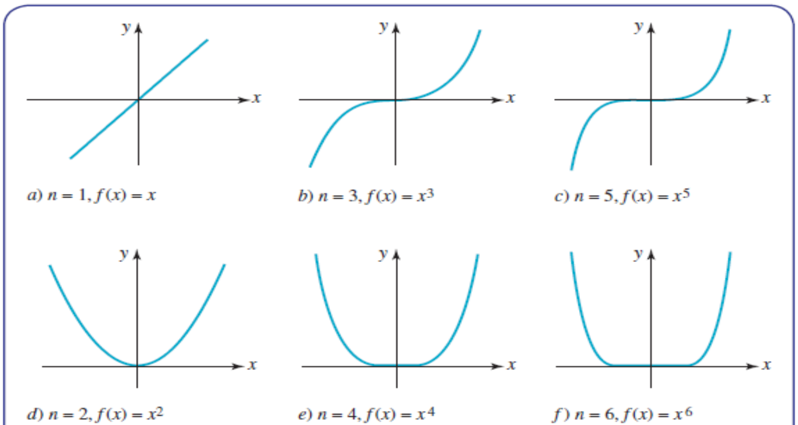


FIGURA 6.1.1 Breve catálogo de la función potencia $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 6$

Imagen 3: Función polinomial de un sólo término. (Zill & Dewar, 2012, p. 267)

Al observar la **Imagen 3**, se pueden diferenciar varios comportamientos de las gráficas que poseen el término independiente cero. Por ejemplo, las gráficas con grado impar son básicamente iguales y se aplanan cada vez más cerca del origen a medida que aumenta el grado n. Esto último también sucede con las gráficas de grado par. Es importante conocer el grado del polinomio y su paridad para comprender mejor su comportamiento en los ejes cartesianos. En el caso de los polinomios con grado par, su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, mientras que los de grado impar son simétricos respecto al origen.

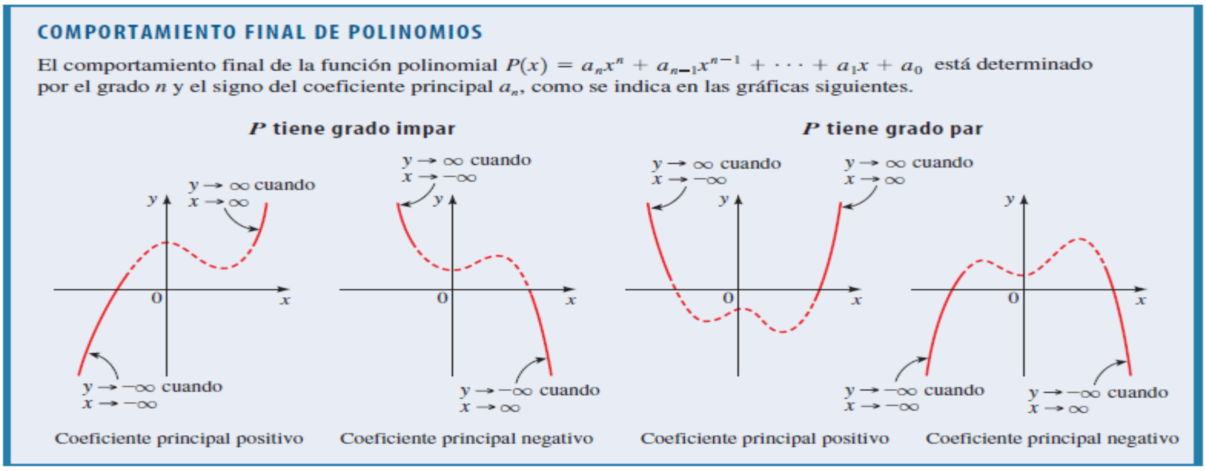


Imagen 4: Comportamiento final de polinomios. (Stewart, 2012, p. 235)

Además de analizar el comportamiento según la paridad de la función, también podemos hacer una descripción de lo que ocurre cuando x se hace grande en la dirección positiva o negativa. es decir, cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. "Para cualquier función polinomial el comportamiento final está determinado por el término que contiene la mayor potencia de x porque, cuando x es grande, los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud" (Stewart, 2012, p. 234). En **Imagen 4**, podemos ver los cuatro posibles tipos de comportamiento, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

Teorema 6.3.2	**Teorema fundamental del álgebra**
Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.	

Toda función polinomial f de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces.

imagen 5: Teorema fundamental del álgebra. (Zill & Dewar, 2012, p. 283)

Teorema del número exacto de ceros de un polinomio	Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Imagen 6: Teorema del número exacto de ceros de un polinomio. (Zill & Dewar, 2012, p. 271)

En los siguientes teoremas extraídos de los distintos libros, se nombra en la **Imagen 5** e **Imagen 6** el *Teorema fundamental del álgebra* escritos con una característica diferente, donde en ambos teoremas se refieren a la cantidad de raíces que tienen las funciones polinómicas, por lo tanto, consideramos muy importantes estos teoremas, ya que aportan una conceptualización útil a la hora de pensar en la enseñanza.

Fundamentación didáctica

Nuestra residencia se organiza en el marco de los lineamientos planteados en la introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE) coordinado por Gema Fioriti y Carmen Sessa. En este trabajo se toma la decisión de estructurar el estudio desde la perspectiva de las funciones, ya que estas son un lugar propicio para comenzar a trabajar algebraicamente con los polinomios sin necesidad de definir a estos como objetos formales. No explicitar la diferencia entre función polinómica y polinomio no afectaría el trabajo matemático a desarrollar en la escuela media. (Sessa, 2015)

Regine Douady (1999) se plantea el estudio de la función que resulta como producto de otras dos, dados estos factores por su gráfico. El objetivo que se perseguía era el estudio del signo de la función producto conociendo el de sus factores. El artículo de la autora fue la inspiración en el equipo de Sessa para que surja la idea de “generar” funciones de grado mayor como producto de otras de menor grado y trabajar fundamentalmente a partir del gráfico de los factores, aprovechando la computadora y el programa GeoGebra para generar los gráficos de las funciones producto (Sessa, 2015).

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005), el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional –como constante, variable, razón de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales– contribuye a la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo. Con el propósito de desarrollar el pensamiento variacional sugieren analizar diferentes representaciones e intentar formular procedimientos, algoritmos o fórmulas que permitan reproducir el mismo patrón de regularidad, calcular el término siguiente, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Entre los estándares propuestos en esa lógica ministerial para el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos están: identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas desde modelos de situaciones de variación con funciones polinómicas; identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación e identificar la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan (p. 87). Tales esquemas permiten advertir la importancia del uso de las representaciones semióticas como fundamento para relacionar los elementos de una función y asignarle significado y sentido a los conceptos. De acuerdo con Duval (2004), las representaciones semióticas son el medio que permite a un sujeto exteriorizar o comunicar sus representaciones mentales." El investigador muestra la importancia de utilizar representaciones simbólicas como base para relacionar elementos de funciones y asignar significados a conceptos. También señala que para el desarrollo de los sistemas algebraicos y analíticos se necesita modelar situaciones de variación con funciones polinómicas, utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente e identificar los cambios en los parámetros y las gráficas que las representan.

El tipo de recorridos que tienen los niños con la aritmética es importante para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la denominada aritmética generalizada. El concepto matemático que hace posible esa generalización es el de variable. El uso de variables, tales como x e y en el enunciado $y = 5x + 12$, es una generalización de una relación aritmética, expresa la relación numérica general que un número es 5 veces otro número más 12. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. La enseñanza de la aritmética queda incompleta y deficiente si no se le imprime una orientación hacia la generalización. (Godino, 2004)

Fuentes curriculares

De los materiales curriculares de la Provincia de La Pampa se recupera lo vinculado al contenido de Función Polinomial del eje *En relación con funciones y el álgebra* de quinto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, cuyo contenido es el que se desarrollará en el aula.

Se hace referencia al análisis e interpretación del comportamiento de las funciones polinómicas en términos de:

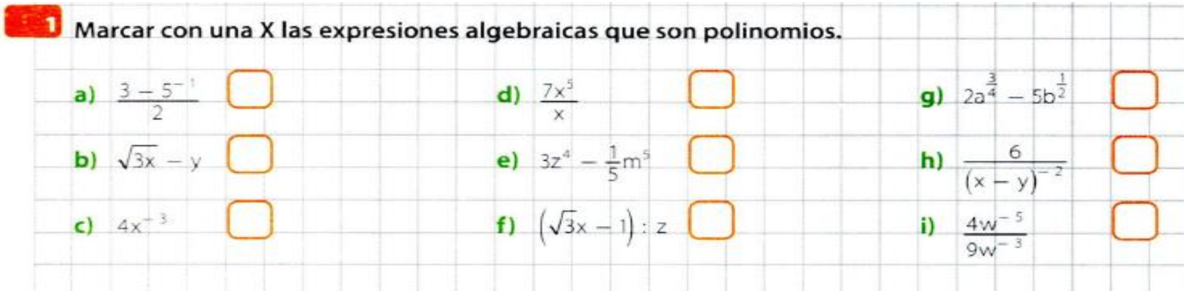
. Interpretar la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (las variables, los parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan).

. Vincular las variaciones de los gráficos con las de sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.

Fuentes editoriales

Luego de revisar diversas editoriales y recursos didácticos disponibles, no hemos encontrado una propuesta de las funciones polinómicas que se ajuste al método de enseñanza que utiliza la UNIPE. Por lo tanto, con el fin de brindar ejemplos más claros y concisos, voy a recurrir a ejemplos basados en la enseñanza "tradicional" de las funciones polinómicas.

El primer libro que vamos a utilizar es "*Matemática 4*" de la editorial Kapelusz.



1 Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.

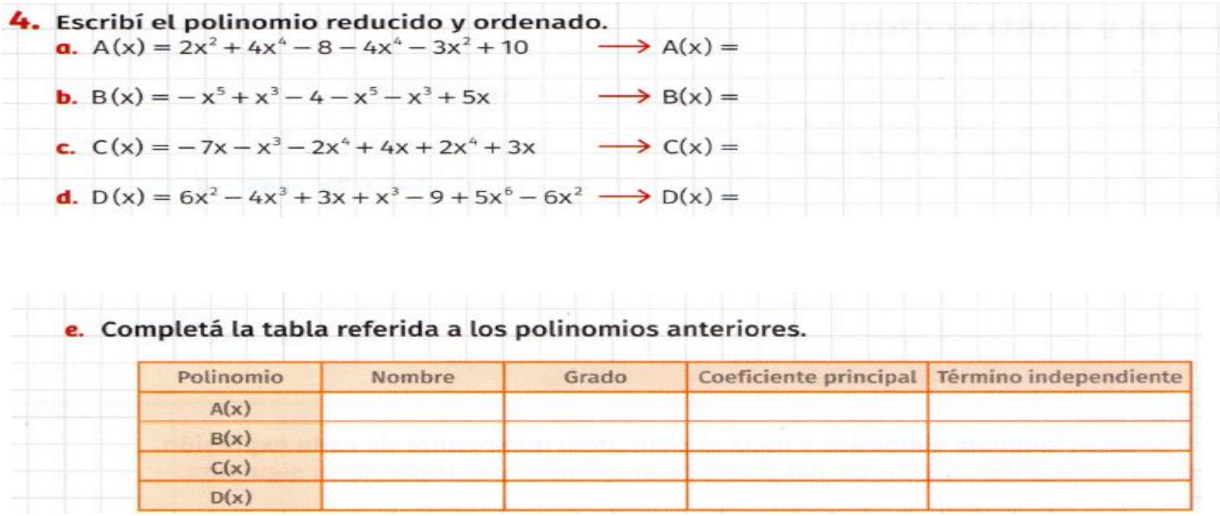
a) $\frac{3-5^{-1}}{2}$ d) $\frac{7x^5}{x}$ g) $2a^{\frac{3}{4}} - 5b^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{3x} - y$ e) $3z^4 - \frac{1}{5}m^5$ h) $\frac{6}{(x-y)^{-2}}$

c) $4x^{-3}$ f) $(\sqrt{3}x - 1) : z$ i) $\frac{4w^{-5}}{9w^{-3}}$

Imagen 5: Actividad de polinomios. (Effenberger, 2013, p. 76)

Esta actividad sirve para asegurarnos que los y las estudiantes entendieron la definición de polinomios. Para poder resolverla necesitarán tener en claro cuáles son las condiciones para que se cumpla la definición. En general, en los diferentes libros de matemática de la educación secundaria y polimodal se ven actividades de este tipo y actividades donde se deben ordenar y clasificar las partes del polinomio como, por ejemplo, en otro libro del mismo autor podemos encontrar la siguiente actividad:



4. Escribí el polinomio reducido y ordenado.

a. $A(x) = 2x^2 + 4x^4 - 8 - 4x^4 - 3x^2 + 10 \longrightarrow A(x) =$

b. $B(x) = -x^5 + x^3 - 4 - x^5 - x^3 + 5x \longrightarrow B(x) =$

c. $C(x) = -7x - x^3 - 2x^4 + 4x + 2x^4 + 3x \longrightarrow C(x) =$

d. $D(x) = 6x^2 - 4x^3 + 3x + x^3 - 9 + 5x^6 - 6x^2 \longrightarrow D(x) =$

e. Completá la tabla referida a los polinomios anteriores.

Polinomio	Nombre	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
A(x)				
B(x)				
C(x)				
D(x)				

Imagen 6: Actividad de funciones polinómicas. ((Effenberger, 2019, p. 53)

En general todos los libros observados coinciden en que, luego de la clasificación, vienen operaciones elementales como la adición, sustracción y multiplicación de funciones polinómicas. Se omite la división.

Una actividad muy interesante es la siguiente planteada en el libro "*Activados Matemática 4*" de la editorial Puerto de Palos

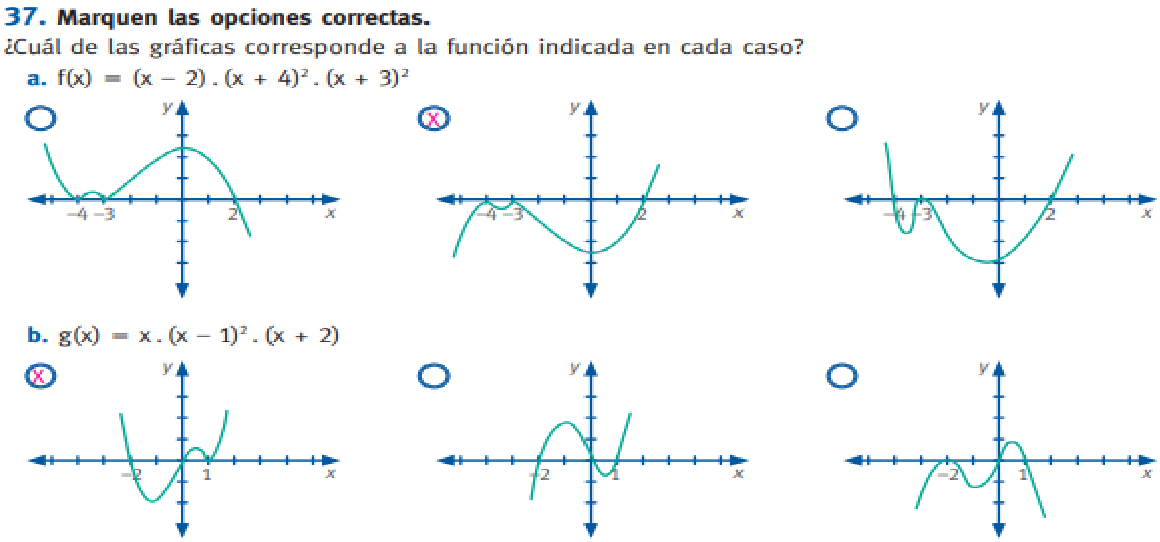


Imagen 7: Gráficos de funciones polinómicas (Abálsamo, 2013, p. 125)

Como nosotros ya encontramos los polinomios de forma factorizada, podemos darnos una primera idea de cómo se va a compartir el gráfico. En el libro se aborda en primer lugar la teoría de las funciones polinómicas en su forma factorizada, incluyendo el comportamiento de las raíces en el gráfico en función de su multiplicidad.

Por último, todos los libros buscan darle un contexto real para comprender mejor las funciones polinómicas. Es muy típico encontrar problemas para encontrar área, perímetro y volumen de alguna figura geométrica. Por ejemplo, retomando el libro *Matemática 4* de la editorial Kapelusz, nos encontramos con ejercicios de este tipo:

Imagen 8: Superficie con polinomios. (Effenberger, 2013, p. 57)

Lo interesante de este tipo de actividades es que pueden comenzar a trabajar un problema desde una figura geométrica y no necesariamente desde la abstracción.

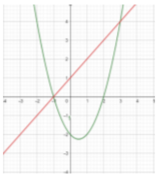
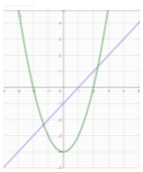
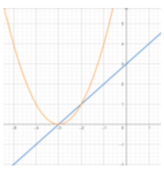
A partir del análisis de varios libros podemos concluir que, tanto en los usados en la facultad para mi formación como en los indagados para buscar actividades y proponer en el aula, en su mayoría, sostienen una misma lógica de trabajo. El trabajo extraído de la UNIPE que tomamos como referencia para nuestra propuesta, es una forma muy diferente de enseñanza donde, partiendo de un entorno de funciones se llega a trabajar algebraicamente con los polinomios sin necesidad de definirlos como objetos formales.

Propuesta de aula

Se plantea una primera actividad con la intencionalidad de que se pueda obtener una función cúbica a partir del producto de una función lineal y una función cuadrática y con ello la posibilidad de analizar e interpretar el comportamiento de las funciones cúbicas a partir de la fórmula algebraica y su gráfico.

Actividad Clase 1

A continuación, se dan los gráficos de f(x) y de g(x). Sea h(x) = f(x)g(x)

 **Imagen 1**	● Calcular: h(-1) = h(1) = h(0) = h(2) = h(4) = Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso h(-1) = h(3) = h(1) = h(-3) = h(0) = h(2) = ● Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad. ● Graficar ● aproximadamente.
 **Imagen 2**	● Calcular: h(-2) = h(1) = h(0) = h(2) = h(3) = Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso h(-1) = h(3) = h(1) = h(-3) = h(0) = h(2) = ● Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad. ● Graficar aproximadamente.
 **Imagen 3**	● Calcular: h(-4) = h(0) = h(-2) = h(-3) = Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso h(-2) = h(-3) = h(-4) = h(0) = ● Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad. ● Graficar aproximadamente.

Actividad 2

Completamos el siguiente cuadro con las conclusiones realizadas hasta ahora:

	Función cúbica	

tres raíces distintas		dos raíces distintas (una simple y una doble)			una sola raíz	

Dado que los valores que va tomando la función resultaron fáciles de hallar, por lo tanto, los alumnos rápidamente pudieron resolver las primeras actividades. Resulta interesante observar, como se esperaba, cómo iban a realizar la forma de las gráficas, fue un desafío graficarlas, ya que se puso en juego si era una curva suave o con picos, ya que algunos las hacían de forma puntiagudas.

Trabajar con el producto de una función lineal y una función cuadrática, también a la hora de completar el cuadro con las raíces que tiene una función cúbica, nos hace pensar si realmente alcanza la primera actividad para poder completarlo, ya que no se alcanzaban a dar cuenta qué debían poner en algunos casilleros.

Producción de las y los estudiantes de las actividades

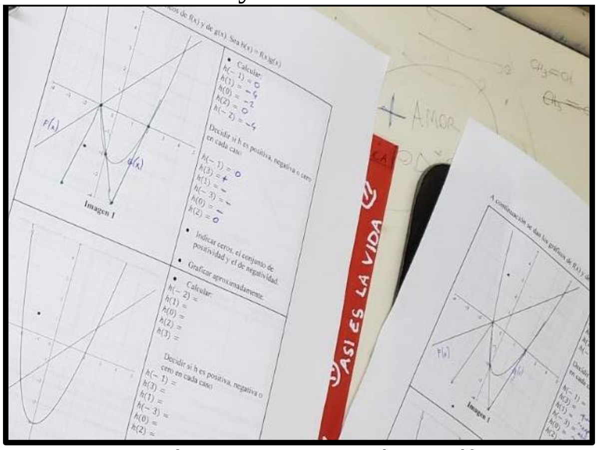


Imagen: resolución de una aproximación de gráfico

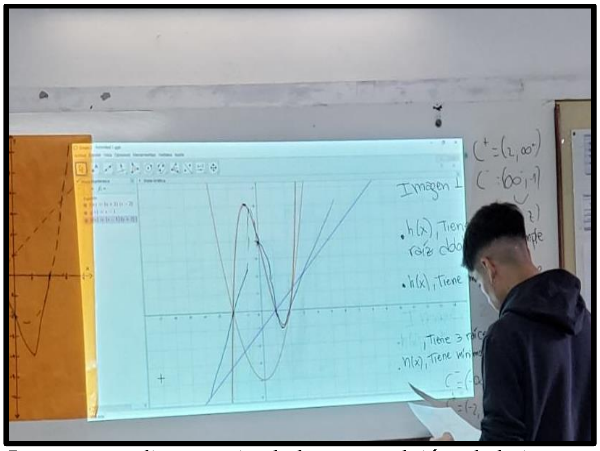


Imagen: estudiante copiando lo que resolvió en la hoja

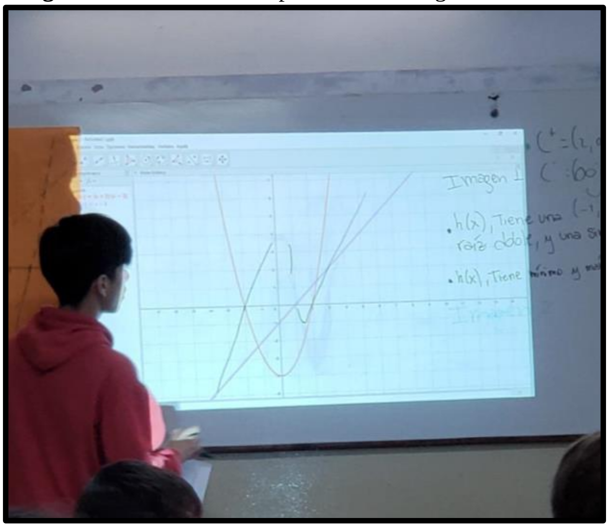


Imagen: estudiante realizando la gráfica aproximada

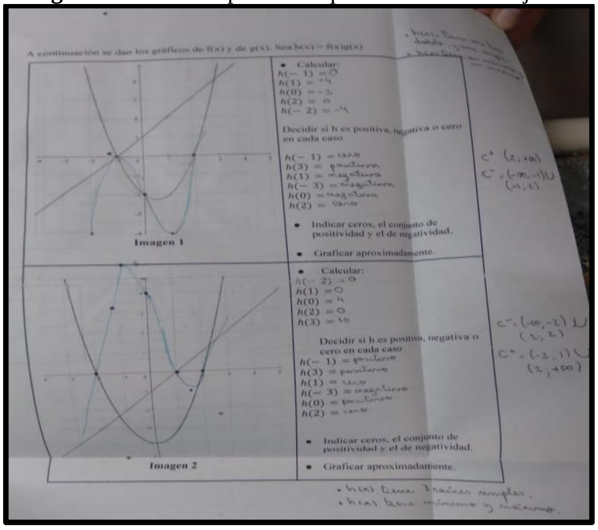


Imagen: resolución de un estudiante que copió del pizarrón

Actividad Clase 2

Con GeoGebra

a. Dibuja h, buscando antes la fórmula factorizada de la parábola y la fórmula de la recta. Guarden este archivo. Luego, encontrá la forma polinómica de la función h
b. ¿Pueden expresar h como producto de 3 rectas? Prueben en papel y con GeoGebra. Grafique h(x), escriban la fórmula de las tres rectas que propusieron y chequeen que el producto les da h(x). Guarden este archivo.
c. Abran el archivo que guardaron en a. Dejen fija la parábola y muevan la recta paralelamente a ella misma de tal manera que el producto h atraviese y rebote el eje x una sola vez. Guarden este archivo sin modificar el anterior (ir a "guardar como").
d. Abran el archivo que guardaron en a. Dejen la recta fija y cambien la parábola para lograr que h tenga distintos ceros al que tenías. (pueden trabajar directo con las fórmulas)
e. Marcá máximos y mínimos de las expresiones que obtuvieron en el archivo que resolvieron en d

Producción de las y los estudiantes de las actividades

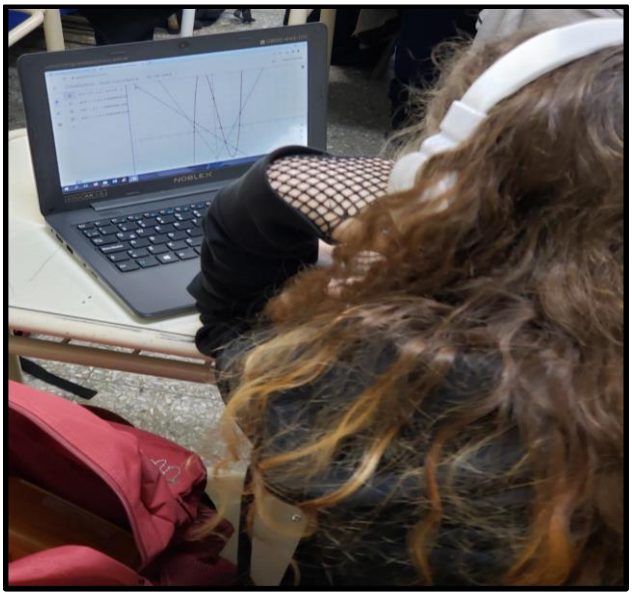


Imagen: alumna probando en GeoGebra que ocurre con las funciones

En esta actividad con el uso del Software GeoGebra, ayudó a reforzar lo de la primera clase en cómo van a ser generalizadas la gráfica de las funciones cúbicas según las raíces que tengan, es decir, si son simples, dobles o triples. Por lo tanto, fue una clase productiva y de extraer más claras las conclusiones.

Actividad Clase 3

1) En cada caso, hallar si existe, la fórmula de una función cúbica que verifique lo pedido, si les parece que no hay expliquen porque:
- **a)** Las raíces -5, -2 y 4 y la función toma valores negativos para x mayores que 4.
- **b)** Las raíces son -3, 2 y 8 y el gráfico de la función corta al eje de las y en 12.
- **c)** las raíces sean 2 y 7.
- **d)** que tenga un solo cero y este en x=7
- **e)** que tenga un cero doble en x=-5.
- **f)** que no tenga ceros
- **g)** que tenga un cero doble en x=5.

Producción de las y los estudiantes de las actividades

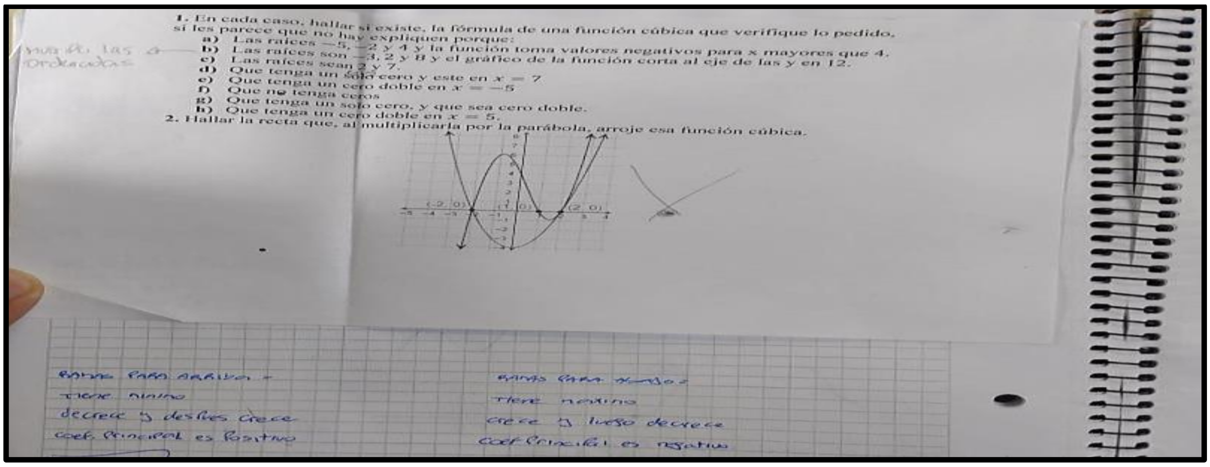


Imagen: apuntes de un estudiante

Pudimos observar en esta actividad que hubo mucho conflicto para darse cuenta que lo que había que buscar era el coeficiente principal para poder encontrar la fórmula de la función cúbica que se pedía, tal vez en la primera actividad se podría haber puesto en juego cambiar el coeficiente principal y que no sea 1. Luego para encontrar la recta les resultó muy sencilla esa actividad.

Actividad Clase 4

1) Con GeoGebra exploren qué pasa cuando multiplico 2 parábolas. Hacer
Sugerencias:

- . una con las ramas hacia arriba por otra con las ramas hacia abajo
- . las dos con las ramas para arriba
- . las dos con las ramas hacia abajo
- . sin compartir raíces, compartiendo ambas raíces, que una no tenga raíces, que ninguna tenga raíces, que las dos tengan raíces dobles.

2) Inventen funciones:

De grado 6 con:

a) 6 raíces
b) 4 raíces
c) con 3 raíces dobles
d) sin raíces
e) ¿Se pueden crear funciones polinómicas que tengan otra cantidad de raíces que no sean las nombradas?

De grado 7 con:

a) 7 raíces
b) solo con 5 raíces distintas
c) con 3 raíces dobles
d) con solo 1 raíz
e) ¿Se pueden crear funciones polinómicas que tengan otra cantidad de raíces que no sean las nombradas?

Hallar en cada caso los máximos y mínimos.

Producción de las y los estudiantes

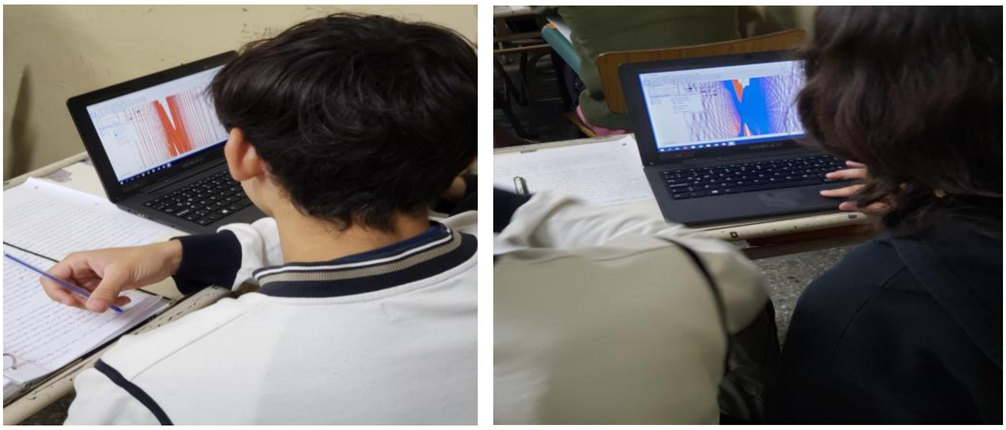
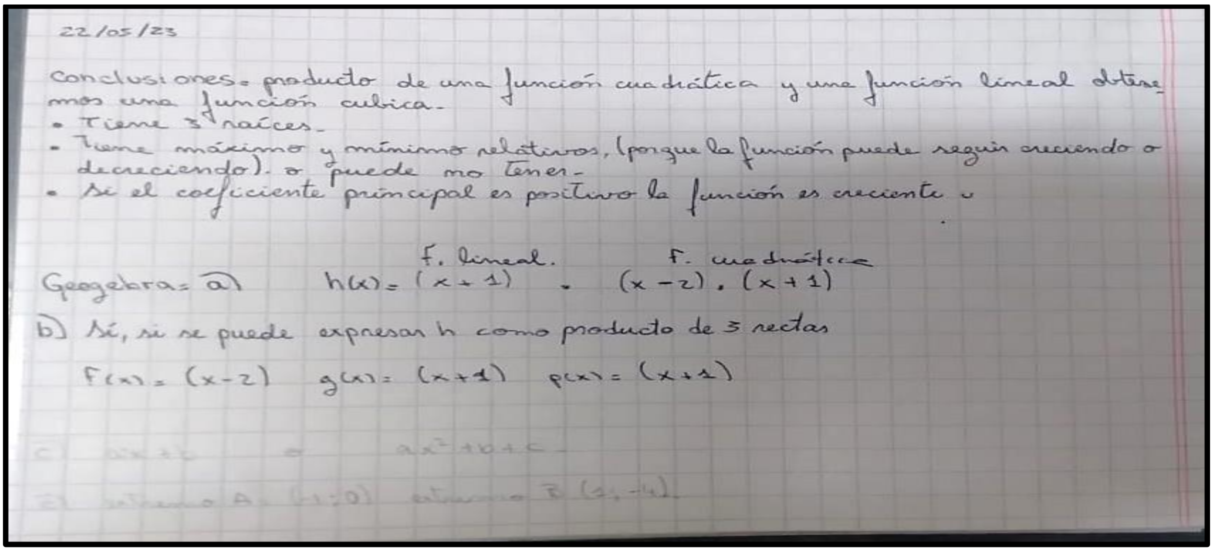


Imagen: compañeros de banco probando con deslizadores como se ven las funciones



22/05/23

Conclusiones: producto de una función cuadrática y una función lineal obtenemos una función cubica.
- Tiene 3 raíces.
- Tiene máximo y mínimo relativos, (porque la función puede seguir creciendo o decreciendo). o puede no tener.
- Si el coeficiente principal es positivo la función es creciente.

Geogebra: a) $h(x) = \underbrace{(x+1)}_{\text{f. lineal.}} \cdot \underbrace{(x-2) \cdot (x+1)}_{\text{f. cuadrática}}$

b) Sí, si se puede expresar h como producto de 3 rectas

$f(x) = (x-2)$ $g(x) = (x+1)$ $p(x) = (x+1)$

Imagen: conclusiones de un estudiante observando los gráficos

Se obtuvieron buenos resultados por parte de los estudiantes con el trabajo en GeoGebra, incluso en cómo iban sacando conclusiones. Mientras que para la actividad donde hay que inventar funciones, las consignas no quedaron muy claras, es decir, no tener tantas restricciones se les complicaba entender qué se pedía escribir. Se dieron buenos debates cuando se pedía armar una función de cierto grado con menos raíces, vinculados a si se podía o no armarla.

Reflexiones Finales

Al concluir el estudio de las funciones polinómicas se logró ofrecer una experiencia educativa integral, desde la comprensión teórica hasta la práctica, utilizando tecnología de manera efectiva y fomentando una comprensión profunda de los conceptos.

A partir de esta propuesta de clase, se evaluaron todos los temas que se estuvieron trabajando, además se dieron de repaso ejercicios de tarea para que pudieran practicar en sus casas y así traer dudas y consultas sobre las cosas que no hayan quedado claras.

Se obtuvieron muy buenos resultados en cuanto a la aprobación, ya que alrededor del 20% de las/os estudiantes desaprobaron, es decir, no llegaron a la nota mínima de 7. Se tomó recuperatorio de las actividades en particular que no pudieron resolver, las cuales fueron las del punto 1 de la evaluación. Con respecto a esto, se obtuvo buen rendimiento y pudieron todos levantar su nota y aprobar.

El grupo trabaja de forma excelente y con entusiasmo. La gran mayoría participa y nadie se niega sí se le solicita pasar al pizarrón a resolver algún ejemplo o a plasmar las ideas que estaban sosteniendo en el momento para discutir con sus compañeros y compañeras antes de formalizar un concepto.

Referencias bibliográficas

Abálsamo, R. (2013). Matemática 4: ¿para qué sirve? Versión para el docente (1a ed.). Puerto de Palos.

Douady, R. (1999). Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16). In Proceedings of CERME (Vol. 1, pp. 113-124).

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento. Cali, Colombia. Universidad del Valle.

E B P Latin America Group, Incorporated. (2007). Temapedia: Matemáticas I. Planeta.

Effenberger, P. (2013). Matemática 4 (1a ed.). Kapelusz.

Effenberger, P. (2019). Matemática IV (1a ed.). mandioca.

Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. (2016, agosto 28). Revista Educación Matemática. Recuperado May 3, 2023, de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol28/3/5.pdf

Godino, J. D. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros (1ra ed.). Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Sessa, C. (2015). Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas: incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula (1a ed.).

Stewart, J. (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo (6ta ed.).

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (1ra ed.).

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3ra ed.).