Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Alexia Gisella Schvatzhenberger, y Valentín Ignacio Venezuela

alexia.schva@gmail.com; valentinvenezuela4@gmail.com

Funciones y ecuaciones cuadráticas. Superficies bajo la lupa

Campo de Prácticas, Año 3, Nº 1, diciembre 2023

Sección: Artículos, pp. 65-78

ISSN 2118-8787

Funciones y ecuaciones cuadráticas. Superficies bajo la lupa

Resumen

En el presente trabajo se presentan los fundamentos didácticos y matemáticos vinculados a los conceptos de funciones y ecuaciones cuadráticas de la propuesta de enseñanza implementada en un curso de 4° año de la Educación Secundaria. El artículo abarca tanto el respaldo matemático de estos conceptos como un análisis didáctico sobre las perspectivas, desafíos y requisitos vinculados a la enseñanza de ecuaciones y funciones cuadráticas. Se examina la importancia y limitaciones de abordar estas áreas desde un enfoque algebraico y gráfico destacando que la aplicación de situaciones problemáticas geométricas brinda un mayor sentido a los aspectos abstractos del álgebra. Para un análisis completo de la propuesta de enseñanza, se presentan ejemplos extraídos de la experiencia práctica en el aula.

Palabras clave: función cuadrática, gráfica, forma canónica, modelización

Quadratic functions and equations. Surfaces under scrutiny

Abstract

The present work presents the didactic and mathematical foundations related to the concepts of quadratic functions and equations within the implemented teaching proposal for a 4th-year course in Secondary Education. The article encompasses both the mathematical underpinning of these concepts and a didactic analysis regarding perspectives, challenges, and requirements linked to teaching quadratic equations and functions. It examines the importance and limitations of approaching these areas from both an algebraic and graphical standpoint, highlighting that the application of geometric problematic situations provides a greater sense to the abstract aspects of algebra. For a comprehensive analysis of the teaching proposal, examples derived from practical classroom experience are provided.

Keywords: quadratic function, graph, canonical form, modeling

Fundamentos matemáticos

Según los libros visados para realizar el análisis de los fundamentos matemáticos sobre funciones cuadráticas, se ha observado que, en algunos libros como (Leithold, 1998, 16), (Rees et al., 1990, 260) y (Redlin et al., 2017, 224) se introduce este concepto partiendo de una función polinómica genérica, quedando determinada así la función cuadrática como un caso especial de esta, con la característica particular de que su grado es dos. Obteniendo así la siguiente expresión.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ (1)}$$

Se expone en general, a continuación de la definición de la función cuadrática, un tratamiento de sus gráficas, dando cuenta de la importancia en la relación función-gráfica. Particularmente, Espinoza Ramos (2002) haciendo uso de la definición conjuntista que agrega, aclara que el dominio de estas funciones son todos los números reales, mención que no se encuentra en otros autores, y procede a completar cuadrados en la función polinómica con el fin de encontrar el vértice de la parábola, denotando la importancia de este punto (Imagen 1).

$$f(x) = a.(x + \frac{b}{2.a})^2 + \frac{4.a.c - b^2}{4.a} \text{ (2)}$$

Esto, junto con el signo del coeficiente principal, será lo que determine el rango de la función.

Si a > 0 se tiene:	Si a < 0, se tiene:
$D_f = R$	$D_f = R$
$R_f = [\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty >$	$R_f = < -\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$

Imagen 1. (Espinoza Ramos, 2002, 223)

Destacamos la necesidad del autor de aclarar que el dominio de las funciones cuadráticas es el conjunto de todos los números reales. Esto es esencial para evitar confusiones y asegurar que las operaciones matemáticas tengan sentido, dado que muchas veces las funciones cuadráticas son abordadas inicialmente en un contexto más restringido como el de los números naturales o los números enteros. Notamos que, si bien se presentan las funciones cuadráticas desde su expresión polinómica, no se hace uso de ésta más que para obtener, mediante procesos matemáticos, otras expresiones.

En libros como Rees et al. (1990) y Swokowski & Cole (2009), el abordaje de la gráfica se hace desde la función $y = x^2$ considerando desplazamientos horizontales y verticales y cómo estos inciden junto con el coeficiente a, respecto del monomio cuadrático base. (Imagen 2)

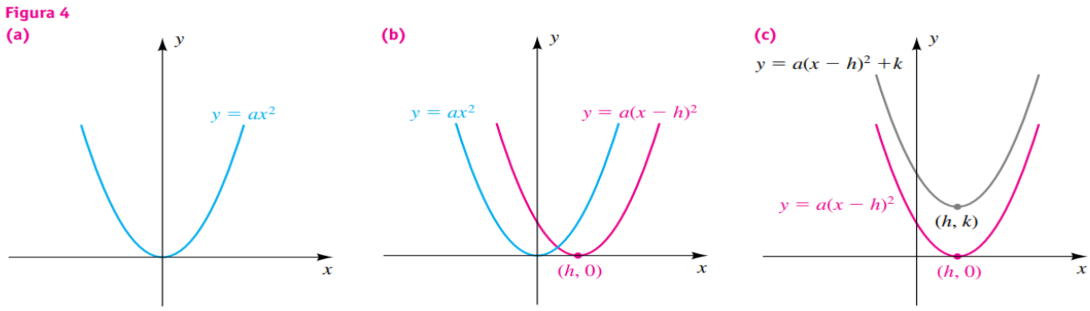


Imagen 2. (Swokowski-Coles, 2009, 215)

Se obtiene así la Forma Normal (Swokowski-Coles,2009, p.215) de la función cuadrática, también conocida como forma canónica:

$$f(x) = a.(x-h)^2 + k \qquad (3)$$

De esta manera, queda bien establecido el vínculo entre los parámetros de la función y la gráfica resultante. Todo esto, permitiría hipotetizar que estos autores, proponen un recorrido de las funciones cuadráticas a partir de la forma normal y su visualización gráfica, estableciendo relaciones entre los parámetros y los movimientos en los ejes cartesianos, respecto del monomio cuadrático base.

En el libro de Zill-Dewar (2012) se aprovecha de la forma canónica para introducir la definición de eje de simetría donde explica textualmente que "todas las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h,k). La recta $x = h$ se llama eje de simetría, o simplemente eje de la parábola" (p.219). Este aporte resulta significativo, pues no es algo abordado en otras fuentes. Este enfoque es valioso en la enseñanza de funciones cuadráticas porque ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mejor la simetría inherente de las parábolas. Incluso facilita la extrapolación de la noción de simetría a diversos contextos.

Luego, los mismos autores continúan con un análisis para hallar las intersecciones de la función cuadrática con los ejes a partir de la ecuación general de la parábola, situación que no es abordada como tal por autores antes mencionados, indicando que para encontrar la intersección con el eje y, debemos igualar la x a cero, y esto se puede hacer dado que 0 está en el dominio de la función. Y con respecto a las intersecciones con el eje x, comentan que para saber si estas intersecciones existen, hay que igualar la función a 0 y luego resolver por factorización o utilizando las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Imagen 3. (Zill-Dewar, 2012, 220)

En Rees et al., (1990) se menciona la posibilidad de encontrar las raíces de la función cuadrática, en caso de existir, factorizando el polinomio o utilizando las fórmulas citadas en la imagen 3. El promedio de las raíces, en caso de existencia, será el valor de x donde se encuentre el máximo o mínimo de la función. Este libro, a diferencia de Zill-Dewar (2012) no hace referencia al eje de simetría como tal, perdiendo así la idea de que el promedio entre dos puntos simétricos cualesquiera darán la coordenada x del vértice, y no solo el promedio de las raíces.
Se observa que, si bien diferentes autores coinciden en la mención de los métodos de factorización y el uso de las ecuaciones presentadas en la imagen 3 para hallar las raíces de una cuadrática, no se hace referencia a casos más simples donde la función cuadrática no se encuentra completa. Como así tampoco se encuentra detallado un tratamiento algebraico que justifique el uso de las ecuaciones mostradas en la imagen 4. Esto, nos lleva a hipotetizar que la función cuadrática como tema de enseñanza, se plantea posterior al tratamiento de ecuaciones y factorizaciones, al menos hasta segundo grado. Permitiendo que los estudiantes puedan acudir a esos conocimientos para facilitar el trabajo con la función mencionada, y no como conceptos que deban darse en paralelo.

Fundamentos didácticos

Luego de analizar varias investigaciones, se pudo establecer un hilo conductor entre ellas y las dificultades de la enseñanza/aprendizaje de las funciones cuadráticas en el nivel secundario. Luis Eduardo Sánchez Espinel (2019) resume las dificultades de estudiantes referidas al tratamiento de las ecuaciones cuadráticas: “se les dificulta reconocer la ecuación de la parábola, escribir la ecuación canónica, graficar una parábola a partir de su ecuación, resolver problemas de aplicación, describir los elementos de la parábola a partir de su ecuación y su gráfica, realizar la conversión en cada uno de los registros: gráfico, analítico algebraico y verbal, para así comprender este objeto matemático, se les dificulta trabajar en cada registro y pasar de un registro a otro”. (Sánchez Espinel, L., 2019, 3). Las dificultades mencionadas podrían estar ocasionadas, entre otras cosas, según Octavio Augusto Briseño Silva porque “el profesor induce al estudiante a conocer las formas de la ecuación cuadrática olvidándose de sus representaciones geométricas en la obtención de la ecuación partiendo de la gráfica” (2013, 15). Se puede interpretar que, Briseño Silva señala la ausencia del vínculo en la enseñanza secundaria, entre la gráfica, la fórmula y las características inherentes a la función cuadrática, vínculo que se encontró tan marcado en las editoriales analizadas en la sección anterior. Si nos referimos al abordaje de las gráficas, Sonia Liliana Ortiz Molina (2023) cita a Gómez et al. (2017) cuando refiere que “específicamente para la enseñanza de las funciones cuadráticas, el uso de GeoGebra presenta un gran potencial para el tratamiento de la vía de interpretación global”. El uso de este tipo de graficadores aporta así una salida a gran parte de las dificultades mencionadas, ya que permiten una rápida visualización gráfica, pudiendo manipular la parábola de forma deseada, mostrando además diferentes representaciones analíticas. Este tipo de software le brinda al estudiante la posibilidad de manipular las gráficas sin necesidad de tediosos trabajos que los lleven a desistir del proceso. En la misma línea de justificación del uso de tecnología, pero con una propuesta didáctica diferente, encontramos a la editorial UNIPE con el texto de “introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas”, donde proponen el trabajo de la función cuadrática como resultado del producto de dos funciones lineales. Si bien se menciona que esta propuesta didáctica fue realizada en grupos que ya habían estudiado funciones de segundo grado, la misma puede interpretarse como otro camino para salvar las dificultades mencionadas por Sánchez Espinel. El trabajo de las funciones cuadráticas como producto de funciones de menor grado, le permitió a los/as estudiantes en base a sus conocimientos previos del tema, obtener nuevas conclusiones del mundo cuadrático y argumentar otras, fortaleciendo además el trabajo algebraico y el vínculo entre los registros gráficos y analíticos. Si nos remitimos nuevamente a la introducción de funciones cuadráticas en la enseñanza Carmen Sessa menciona que, en general, los alumnos se ven enfrentados a las tareas de "poner en ecuación" un problema y "despejar la incógnita" (con todas sus reglas asociadas) como las primeras experiencias en el terreno del álgebra. Lo que lleva a que, para muchos alumnos, las ecuaciones son "cosas que se despejan", y en el caso de las ecuaciones cuadráticas, según Adriana Diaz, (2011, 38), los estudiantes sólo las resuelven a través de la ecuación $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ aún cuando las soluciones pueden obtenerse a simple vista o por factorización. Esto, se encuentra en consonancia con lo mencionado en la sección anterior sobre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

Para darle un sentido al tratamiento de las ecuaciones cuadráticas, evitando que sean solo cosas a despejar, Briseño Silva propone la utilización de la modelización como herramienta que “permite estudiar cómo el estudiante pasa de una situación abierta (dominio real) a un modelo preciso (dominio matemático)” y a su vez “permite establecer relaciones entre el conocimiento matemático y los diferentes fenómenos de la vida real” (Silva, 2013, 19). Así, la función cuadrática se enmarca en un contexto, tiene un sentido y surge de la necesidad y como consecuencia de una propuesta didáctica y no como un conocimiento aislado.

Con base en todo esto, observamos que los autores indican que las dificultades a la hora de enseñar funciones cuadráticas radican en la relación entre representaciones gráficas y analíticas, la manipulación de ecuaciones cuadráticas y la comprensión del concepto de función. Para abordar estas funciones y todas las complejidades que trae aparejadas, diferentes autores proponen estrategias que se enfocan en la visión del estudiante como creador de conocimiento, brindando el escenario que les permita tomar un rol activo en el aprendizaje, tanto en la propuesta didáctica de la modelización, como en la justificación del uso de herramientas digitales y la propuesta de UNIPE. Rescatamos de la palabra de los autores, el desafío de establecer relaciones entre representaciones gráficas y analíticas que promuevan la necesidad de no tratar las ecuaciones cuadráticas como ejercicios de "resolver la incógnita".

Fundamentos curriculares

En cuanto al Currículum Oficial se encuentran las siguientes prescripciones respecto a las funciones y ecuaciones cuadráticas para cuarto año del ciclo orientado de la Educación Secundaria de la provincia de La Pampa.

Eje: En relación con las funciones y el álgebra

La modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas.

Esto supone:

- Modelizar situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones cuadráticas, usando las nociones de dependencia y variabilidad, seleccionando la representación (tablas, fórmulas, gráficas, etc.) adecuadas a la situación, interpretando el dominio, codominio, variables, parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan.
- Analizar el comportamiento de las funciones cuadráticas interpretando la información que portan sus gráficas y sus fórmulas, vinculando las variaciones de sus gráficas con las de sus fórmulas y estableciendo la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones mediante el uso de recursos tecnológicos.
- Interpretar diferentes escrituras de las fórmulas de las funciones cuadráticas y transformarlas apelando a recursos algebraicos, si la situación lo requiere.
- Modelizar extramatemáticas e intramatemáticas mediante ecuaciones cuadráticas y resolverlas apelando a recursos algebraicos y gráficos realizados con recursos tecnológicos, interpretando las soluciones en el contexto de la situación.
- Analizar la ecuación cuadrática vinculando la naturaleza de sus soluciones con la gráfica de la función correspondiente, reconociendo las limitaciones de los números reales desde los marcos algebraico y gráfico.

Propuesta implementada

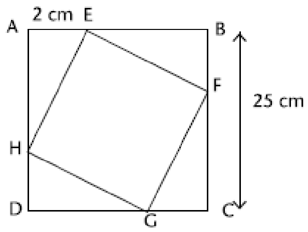
En este apartado se pretenden analizar algunas actividades implementadas en la práctica docente en conjunto con fundamentos matemáticos y didácticos mencionados con anterioridad. Dicha propuesta de enseñanza y aprendizaje se realizó en un cuarto año del Colegio Secundario UNLPam encuadrada en los contenidos y prescripciones propuestos por el currículum oficial. En consonancia con las dificultades analizadas y las propuestas citadas por Briseño Silva se comienza con un problema geométrico que podrá en contexto y permitirá modelizar la situación desde un dominio real a un dominio matemático, en base a sus conocimientos previos.

De áreas y de cuadrados

Primer momento: Para iniciar al estudiantado en el tema "funciones cuadráticas" se seleccionó la siguiente actividad.

Actividad 1

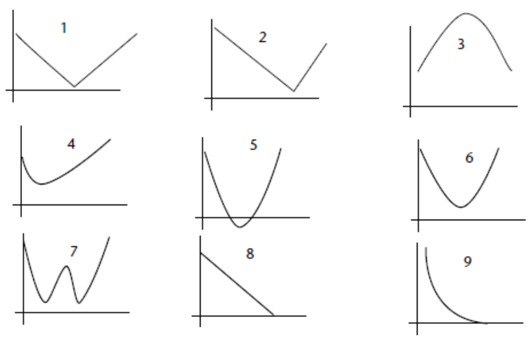
Dado un cuadrado ABCD de 25 cm de lado, se considera el cuadrado inscripto EFGH, de tal manera que el vértice E se ubique a 2 cm del vértice A



a) ¿Cuál es el área de EFGH cuando la distancia de A a E es de 2 cm?
b) ¿Habrá algún cuadrado construido de esta forma cuya área sea menor al anterior? Si lo hay, encontrar alguno y decir cuál es la distancia que consideraste para encontrarlo. ¿Habrá algún cuadrado cuya área sea más chica que la de todos los demás cuadrados posibles?
c) ¿Habrá algún cuadrado construido de esta forma cuya área sea mayor al del ítem **a**? Si lo hay, encontrar alguno y decir cuál es la distancia que consideraste para encontrarlo. ¿Habrá algún cuadrado cuya área sea mayor que la de todos los demás cuadrados posibles?
d) ¿Habrá un cuadrado con área igual a 289 cm^2? ¿Y uno de 729cm^2?

Segundo momento

a) Decidir cuál de los siguientes gráficos representa la variación del área del cuadrado EFGH en función de la distancia AE. Explicar por qué.



Tercer momento

b) Buscar la fórmula para el cálculo del área en función de la distancia AE.

La estrategia utilizada por algunos estudiantes fue la de calcular el área del cuadrado EFGH a partir de la resta de las áreas del cuadrado ABCD y los cuatro triángulos rectángulos iguales a AEH. Otros/as, optaron por calcular el área a partir de la identificación de que la figura EBF es un triángulo rectángulo, utilizando el teorema de Pitágoras para calcular el lado EF de acuerdo con los datos aportados, y, por último, aunque en menor medida optaron por medir las longitudes con regla.

Los ítems posteriores tenían la intencionalidad de fomentar la familiarización y manejo del problema indagando sobre áreas dada una medida de AE o determinar si existe alguna medida de AE dado un área. Posteriormente, dados los valores obtenidos por los estudiantes para los pares $(AE, \acute{a}reaEFGH(AE))$ se organizaron en una tabla donde se pudo ver claramente las características de la función cuadrática como la existencia de, en este caso un valor mínimo, valores simétricos, el crecimiento y decrecimiento, etc. Esto permitió reconocer la gráfica que representa el problema entre otras proporcionadas dando como justificativos “la suavidad del crecimiento”, “la simetría”, “la existencia de un valor mínimo”, entre otras.

Por último, se pidió generalizar una ecuación que permita calcular el área del cuadrado EFGH dada una medida de AE. Para este punto se requirió de mucho acompañamiento docente, por lo que la actividad fue realizada en el pizarrón con participación de todo el estudiantado.

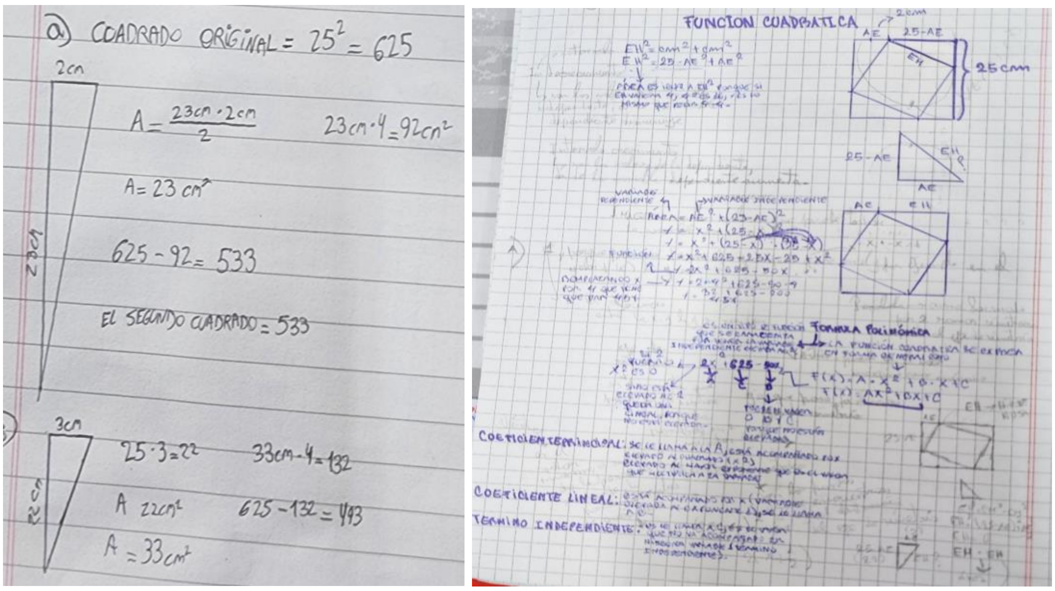
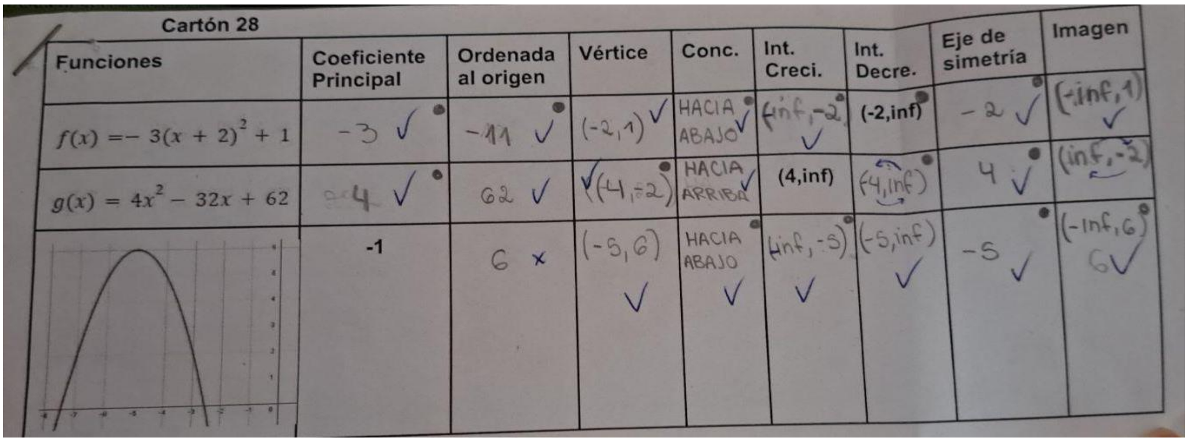


Imagen 4. Registro de estudiantes

Bingo de cuadráticas

La actividad consiste en repartir una tarjeta por estudiante. Cada tarjeta cuenta con tres funciones cuadráticas en diferentes expresiones, polinómica, canónica y gráfica. Se dan 20 minutos para que cada uno/a identifique en una hoja vértice, concavidad, dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, coeficiente principal y ordenada al origen de cada función. El profesor saca papeles que contienen propiedades o características de las funciones y los estudiantes marcan en su tarjeta cuál o cuáles de las funciones que tienen en la tarjeta satisfacen dicha característica, poniendo P_i en la tabla, con $i = 1,2,3, \ldots$. el número de propiedad extraída de la caja. Cuando se complete una línea, el/la estudiante grita **¡línea!** y se le otorga un premio. Gana quien haga cartón lleno.



Cartón 28

Funciones	Coeficiente Principal	Ordenada al origen	Vértice	Conc.	Int. Creci.	Int. Decre.	Eje de simetría	Imagen
$f(x) = -3(x+2)^2 + 1$	-3 ✓	-11 ✓	(-2,1) ✓	HACIA ABAJO ✓	(-inf,-2) ✓	(-2,inf)	-2 ✓	(-inf,1) ✓
$g(x) = 4x^2 - 32x + 62$	4 ✓	62 ✓	✓ (4,-2)	HACIA ARRIBA ✓	(4,inf)	(4,inf)	4 ✓	(inf,-2)
	-1	6 ×	(-5,6) ✓	HACIA ABAJO ✓	(inf,-5) ✓	(-5,inf) ✓	-5 ✓	(-inf,6) 6 ✓

Imagen 5. Registro de estudiantes

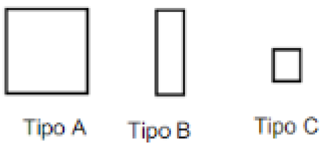
Esta actividad se pensó como un método evaluativo para ver qué tan afianzados estaban los contenidos que se fueron trabajando, y observar qué faltaba por reforzar. Fue una actividad muy inspiradora para los/as estudiantes, logró hacer que todos trabajen y se involucren en la actividad sin sentir la presión de una evaluación tradicional. Los resultados de esta actividad fueron muy polarizados, muchos estudiantes con notas muy altas y otros con notas muy bajas. Pudimos ver dificultades en las expresiones de intervalos, en la identificación de la imagen de la función, en los signos en cuanto a la identificación del vértice desde la función canónica y procedimientos algebraicos necesarios para obtener algún dato. Si bien el estudiantado mostró buena predisposición a la actividad, se evidenció una resistencia a operar algebraicamente con la función polinómica y una inclinación a la identificación de los datos en las expresiones canónicas y las gráficas. La actividad estaba planteada a carpeta abierta, y siendo que algunas de las funciones utilizadas ya habían sido trabajadas con anterioridad o solo presentaban un cambio de signo, muy poco estudiantes recurrieron a sus carpetas para ayudarse, pero varios optaron por la herramienta GeoGebra, cuestión que no había sido tenida en cuenta. De esto concluimos que realizar actividades utilizando el juego y un recurso visual hace que el estudiantado se sienta motivado e interesado en realizarlas.

Casa Segura

Para este momento se selecciona una actividad basada en "la caja de polinomios" llamada casa segura, cuya finalidad es la de introducir funciones cuadráticas en forma factorizada y a su vez comentar sobre la relación entre esta forma y las raíces de la función.

Casa segura: modelos

Una compañía ofrece viviendas cuyos terrenos son de 3 formas posibles para los diferentes bolsillos y necesidades:



Para este fin dispone de terrenos rectangulares que van a subdividir utilizando esos modelos y, como necesita aprovechar toda la superficie, ubica las viviendas de manera que coincidan los lados que tengan la misma longitud.

Está analizando ofrecer diferentes combinaciones de tipos de viviendas:

Posibilidad 1: 1 de tipo A, 6 tipo B y 8 tipo C.
Posibilidad 2: 1 tipo A, 5 tipo B y 4 tipo C
Posibilidad 3:1 tipo A, 8 tipo B y 12 tipo C.
Posibilidad 4: 1 tipo A, 4 tipo B y 4 tipo C.
Posibilidad 5: 1 tipo A, 4 tipo B y 8 tipo C.

Para estudiar la situación en tu grupo, registren en una hoja:

1. Un esquema de la distribución de las viviendas para cada una de las posibilidades que la empresa propone.
2. Las expresiones que definen el ancho y el largo del terreno rectangular, a partir de la combinación de viviendas en cada posibilidad.
3. Una expresión para el área del terreno rectangular para cada combinación analizada

Se sabe que la empresa designó que:

. El lado del cuadrado de la vivienda tipo A mide $x\ metros$.
. Los lados de las viviendas tipo B miden $x\ m$ y $1\ m$.
. El lado del cuadrado de la vivienda tipo C mide $1\ m$.

Parte 2. Graficar en GeoGebra cada una de las funciones encontradas.

Parte 3: Entre todos, armamos una disposición con 2 modelos tipo A, 6 tipo B y 4 tipo C. Regístralo en tu carpeta, escribí las dimensiones y el área.

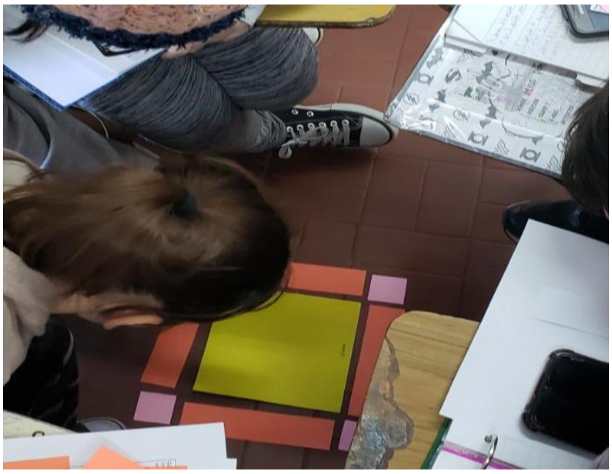


Imagen 6. Registro de estudiantes

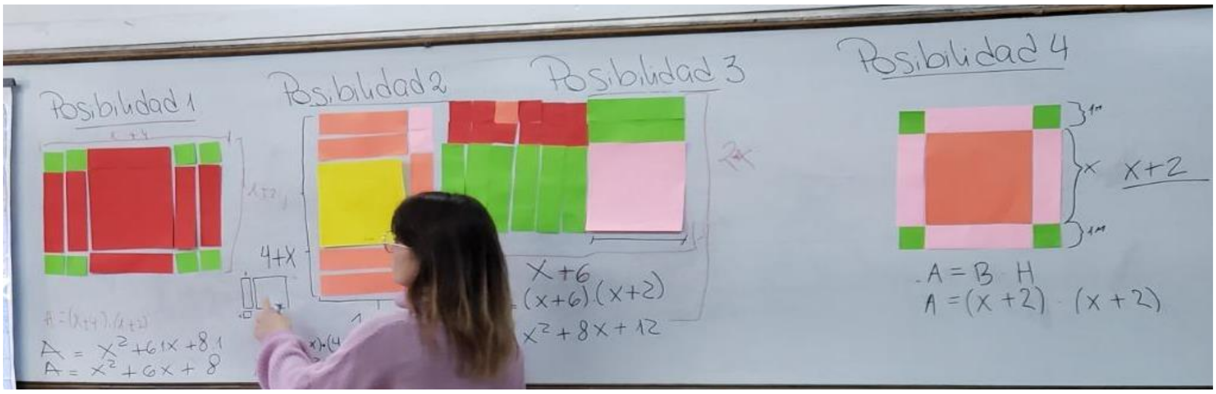


Imagen 7. Registro de la actividad Casa segura

Esta actividad tuvo muy buena aceptación por parte del estudiantado, logró que todos se involucraran en la resolución. Sin embargo, tuvimos que dividir las consignas y asignar una por grupo, dado que la actividad completa era demasiado larga para resolverla en una sola clase, y era importante que se resuelva en su totalidad para poder institucionalizar funciones cuadráticas en forma factorizada. Recomendamos reducir la cantidad de posibilidades para armar, con el fin de que todos los grupos piensen y resuelvan todas las posibilidades. Más allá de eso es una buena actividad para que se involucren las/os estudiantes que son menos propensos a participar. Las conclusiones entre la equivalencia de las fórmulas resultaron muy visibles con la ayuda de este recurso, dando también un significado y estableciendo el vínculo directo entre las raíces de la función, su expresión factorizada y su lectura gráfica. Además, se reforzó la idea de la influencia de los signos en la expresión y los valores que corresponden a lo pedido.

Reflexiones finales

Nos resulta importante destacar a partir de lo estudiado y los resultados obtenidos en la propuesta de clase implementada, la utilización de la modelización como propuesta didáctica, ya que, a partir de ella y de los conocimientos previos, los/as estudiantes pudieron explorar un problema y obtener nuevas conclusiones, creando así nuevos conocimientos. Es decir, siendo partícipes activos en su propio aprendizaje. La utilización de un contexto geométrico, que tantas veces es dejado de lado en la práctica, nos permitió establecer hipótesis sólidas sustentadas en las propiedades de estos objetos, estableciendo un camino seguro para lo nuevo. Resaltamos, además, las propuestas de clase no tradicional sustentadas en juegos, que llevaron a la predisposición y ansias de participación en parte del público más reacio a estas interacciones. Además, este tipo de actividades, como también la propuesta con herramientas mediadoras como las fichas de cartulina, el software GeoGebra fomentaron la colaboración entre pares, fortaleciendo así el vínculo entre el estudiantado. Además, se evidenció la curiosidad matemática y la necesidad de buscar herramientas propias y no propias para la resolución de las actividades propuestas. Consideramos, en fin, de vital importancia crear escenarios que inviten a la participación activa, con herramientas a disposición, a la cooperación y apertura al diálogo, planteando interrogantes y estableciendo teorías que fomenten la curiosidad, abriendo el camino a la creación de nuevos conocimientos.

Referencias bibliográficas

Díaz, A. L. (2011). *Enseñar matemáticas en la escuela media* (1a ed.). Biblos.

Espinel Sanches, E. (2019). La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas [Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de Magíster en Educación Matemática] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad Ciencias de la Educación, Escuela de Licenciatura en Matemáticas, Tunja.

Espinoza Ramos, E. (2002). *Análisis Matemático I. Para estudiantes de Ciencia e Ingeniería* (3era ed.). EDITORIAL SERVICIOS GRÁFICOS J.J.

Gema, F (ed.); Carmen, S (ed.) . (2015). Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas : incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula. UNIPE. http://biblioteca.clacso.edu.ar/Argentina/unipe/20200415101252/Polinomios.pdf

Itzcovich, H., Novembre, A., Carnelli, G., Lamela, C., & Lindenbaum, L. (2006). *Matemática 1* (1a ed.). Tinta Fresca.

Itzcovich, H., Novembre, A., Carnelli, G., Lamela, C. (2018). *Matemática 2* (1a ed.). Tinta Fresca.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. Harla.

Ministerio de Educación, Buenos Aires Ciudad. (2014). Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf

Octavio Augusto, B, M (2014). Una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática [Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa]. CICATA - Legaria.

Redlin, L., Stewart, J., & Watson, S. (2017). *Precálculo: matemáticas para el cálculo* (J. León Cárdenas, Trans.). Cengage Learning.

Redlin, L., Watson, S., & Stewart, J. (2012). *Precalculus: Mathematics for Calculus*. Cengage Learning.

Rees, P. K., Rees, C. S., & Sparks, F. W. (1990). *College Algebra*. McGraw-Hill.

Sonia Liliana, O, M (2023). Guía Instructiva para el uso de RDD enfocados a la enseñanza de funciones cuadrática.

Swokowski, E., & Cole, J. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (décimo segunda ed.). Cengage Learning.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (M. d. P. Carril Villarreal, Trans.). McGraw-Hill Interamericana.