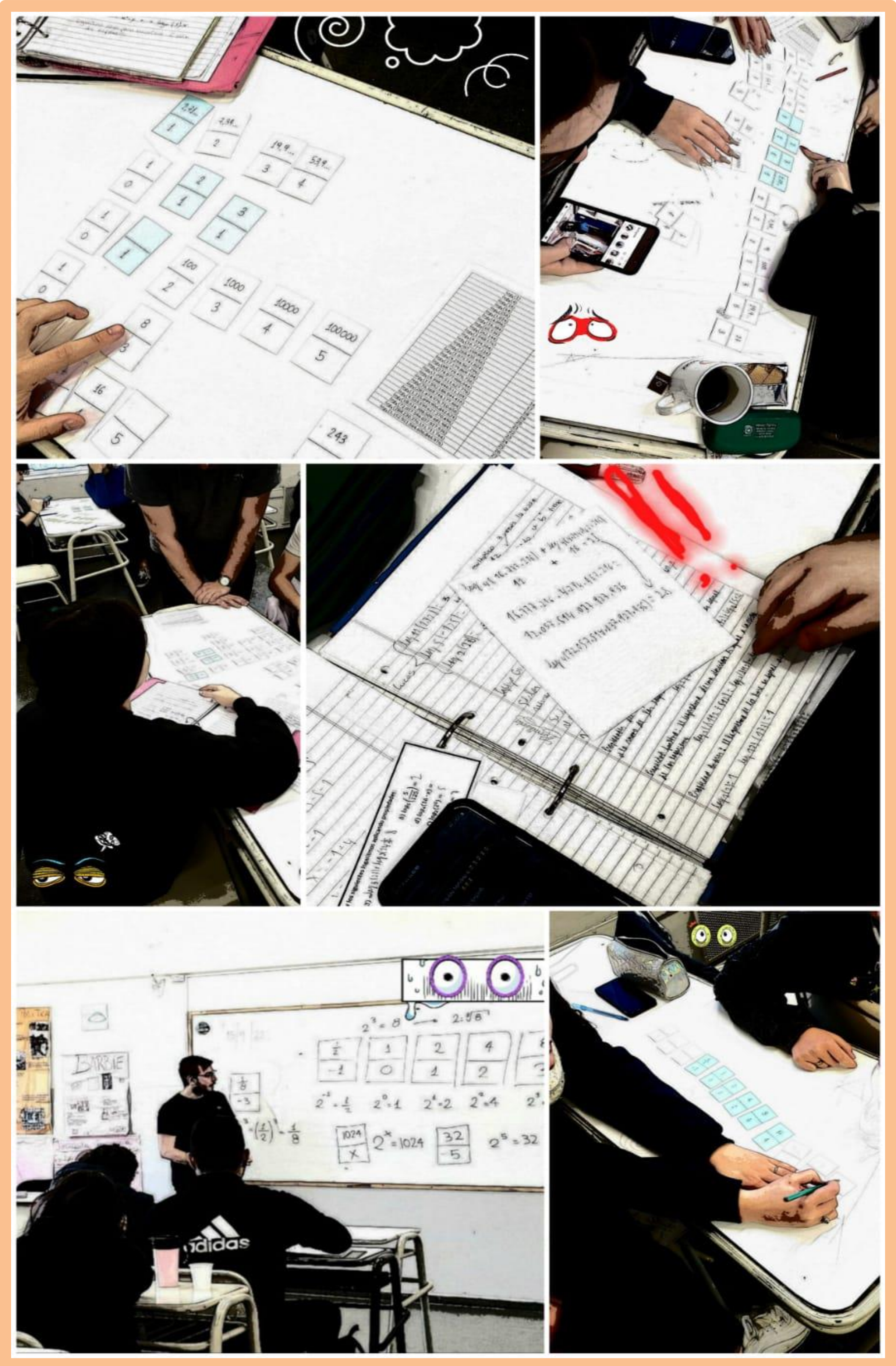


100
2
1000
3
10000
4
100000
5
243
$2^3 = 8$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
1024
x
$2^x = 1024$
32
5
$2^5 = 32$
adidas

Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Andres Iván Garcia

andres.bhm@gmail.com

El algoritmo de los logaritmos

Campo de Prácticas, Año 2, Nº 1, octubre 2022

Sección: Artículos, pp. 118-139

ISSN 2118-8787

El algoritmo de los logaritmos

Resumen

Los logaritmos son históricamente reconocidos por su utilidad para reducir el grado de dificultad de las operaciones. En sus orígenes fueron utilizados mediante tablas que arrojaban el resultado para la asociación entre dos números. En la actualidad, los utilizamos del mismo modo, pero no de forma directa, sino mediante algoritmos configurados en las calculadoras que nos arrojan el resultado de las operaciones. En este documento se describe el recorrido desde una revisita a diversos libros matemáticos, tomando sus grandes características en la definición del logaritmo, propiedades -logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, cambio de base-; pasando por el análisis de libros con fines avocados a la enseñanza matemática y propuestas editoriales para tener más elementos a la hora de elaborar una propuesta enseñanza; y se presentan algunos momentos de la experiencia desarrollada luego en aula. Algunos interrogantes han orientado los sentidos en todo este camino: ¿cómo se enseñan los logaritmos?, ¿qué alternativas ayudarían?, ¿qué tan significativa nos resulta la construcción histórica en el aprendizaje de los logaritmos?

Palabras Claves: logaritmos, enseñanza, aprendizaje, modalidades algorítmicas, recuperación de sentidos históricos

The algorithm of logarithms

Abstract

Logarithms are historically recognized for their usefulness in reducing the degree of difficulty of operations. Originally, they were used by means of tables that yielded the result for the association between two numbers. Nowadays, we use them in the same way, but not in a direct way, but by means of algorithms configured in calculators that give us the result of the operations. This document describes the journey from a review of several mathematical books, taking their main characteristics in the definition of the logarithm, properties -logarithm of a product, logarithm of a quotient, logarithm of a power, change of base-; going through the analysis of books with purposes devoted to mathematical teaching and editorial proposals to have more elements at the time of elaborating a teaching proposal; and some moments of the experience developed later in the classroom are presented. Some questions have guided us along the way: how are logarithms taught, what alternatives would help, how significant is the historical construction in the learning of logarithms?

Keywords: logarithms, teaching, learning, algorithmic modalities, recovery of historical meanings

Fundamentos Matemáticos

Según lo analizado en los libros de Cólera y De Guzmán (1994), Swokowski y Cole (2009), Stewart, Redlin y Watson (2007) y Velázquez et al. (2013) se presentan los logaritmos a través del concepto de *función logarítmica*, considerada como la inversa de la función exponencial, y a partir de la necesidad de despejar x en una función de la forma $a^x = y$. Esta presentación le otorga un valor instrumental al proponerla como una herramienta útil para hallar el conjunto solución en este tipo de ecuaciones.

Definición de la función logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el *exponente* al que se debe elevar la base a para dar x.

Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** está definido por

$$y = \log_a x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

Allendoerfer y Oakley (1990) presentan a la f*unción logarítmica* como la inversa de la exponencial, pero a partir de un teorema de funciones inversas. Recuperan la función exponencial, y viendo que cumple con las hipótesis de este teorema, aseguran la existencia de su inversa, a la que llaman función logarítmica. Esto provoca una ausencia de significado histórico y de la potencia de la función en sí misma debido a que se da su existencia como resultado de un proceso de análisis matemático y no responde a ninguna necesidad de una función que resuelva ciertos aspectos.

Definición: Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\log_a x = b$ si, y solamente si, $a^b = x$.
$\log_a x = b$ "se lee" logaritmo en base a de x igual a b.

El libro de Ayres (1989) presenta al concepto de logaritmo de forma independiente a la relación con la función exponencial, no se la define en torno a una necesidad ni a la relación con su función inversa. Se da un nuevo algoritmo para resolver expresiones del tipo $log_b N$.

EL LOGARITMO DE UN NUMERO POSITIVO N en una base dada (lo cual se escribe $\log_b N$) es el exponente de la potencia a que hay que elevar b para tener N. Se da por sentado en todo el capítulo que b es positivo y distinto de 1.

En la publicación de Espinoza, Valencia, Dávila Rascón y García Alvarado (2008), vemos que no define la función logaritmo de forma genérica, sino y directamente el *logaritmo natural*, tomando el caso en el que la base del logaritmo es el número e.

> La función exponencial tiene función inversa definida en el conjunto de los reales positivos. A su función inversa se le llama *función logaritmo natural* y se denota
>
> $$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
>
> $$\ln x = \exp^{-1} x.$$

El *logaritmo natural* o *neperiano*, también lo encontramos mencionado en los libros de Velázquez et al. (2013), Swokowski y Cole (2009) y Cólera y De Guzmán (1994), como un caso particular de la función logaritmo en el que la base es igual a $e = 2.71828$ ... En el libro de Allendoerfer y Oakley (1990) también encontramos el *logaritmo natural*, y definido de la misma manera que se definió la función logarítmica: con el teorema de las funciones inversas. En el libro de Stewart et al. (2007) observamos que ahora hay una referencia histórica en relación a quién fue John Napier, qué hizo, y para qué usaba los logaritmos en su momento, otorgando un gran significado histórico y contextual al concepto. En Ayres (1989) no se hace referencia al *logaritmo natural* o *neperiano*, se enuncian algunos conceptos que no se observan en otras bibliografías analizadas anteriormente, como el *cologaritmo*. Más adelante, de manera similar, se presenta el *logaritmo decimal* o *logaritmo común* o *logaritmo vulgar*, aquel que en su base toma el valor 10. Se lo presenta como un caso particular en los libros de Cólera y De Guzmán (1994), Swokowski y Cole (2009), Stewart et al. (2007) y Ayres (1989).

Relacionado a las propiedades, observamos que casi todos los libros enuncian al menos las propiedades de: logaritmo de un producto, logaritmo de un cociente, logaritmo de una potencia, logaritmo de una raíz, y cambio de base. La confirmación de la importancia a partir de la presencia sistemática ayuda a pensar en su inclusión a la hora de enseñar.

En particular, en los libros de Cólera y De Guzmán (1994) y Stewart et al. (2007) se agrega que el Logaritmo de la base es 1 y que el Logaritmo de 1 es 0, dos propiedades muy potentes matemáticamente para la aplicación de propiedades anteriores y la descomposición de logaritmos, a priori, complejos.

Fundamentos de Didáctica de la Matemática

En esta breve monografía se pretenden analizar algunas problemáticas que se han investigado vinculadas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los logaritmos. Así, una primera consideración parte de la importancia de la noción de covariación en el trabajo por los significados escolares de la función logaritmo. Ferrari (2004) señala que "la manipulación errónea de los logaritmos da cuenta de la no apropiación de la noción de los mismos, producto de no ser construida escolarmente" (pág. 1). El investigador advierte que al cuestionar esto y adherir a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y analizar la covariación como una manera alternativa de abordar las conceptualizaciones de función. Entendemos por covariación a la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades, según Ferrari (2004). Así, una recta puede caracterizarse como la covariación entre progresiones aritméticas, en tanto que el logaritmo como la covariación entre una progresión geométrica (aquella sucesión de números tal que el cociente de dos términos consecutivos es constante) y una progresión aritmética (aquella sucesión de números tal que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante).

Por otra parte, destaco los trabajos acerca de los abordajes de la historia matemática en los logaritmos y sus aplicaciones, que en el estudio de Abrate y Pochulu (2007) se sostiene que debemos apartarnos del tratamiento que tradicionalmente se le ha dado a este tema en la escuela, donde muchas veces se lo reduce a una aplicación algorítmica de propiedades, y se muestran los logaritmos sin ningún antecedente analítico. Los autores presentan para ello algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos tratando de buscar la comprensión de los conceptos y procedimientos e intentando dotarlos de mayor sentido para los estudiantes. En este camino, proponen recuperar la construcción histórica por la que atravesaron las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones. Una de las sugerencias que plantean es retomar la idea original de Napier, que motivara el surgimiento de los logaritmos: comenzar haciendo multiplicaciones largas y engorrosas para que surja la necesidad de una operación que permita bajar la dificultad de las operaciones.

Ejemplo.

Queremos realizar la siguiente multiplicación:

$$625 \cdot 1.953.125 =$$

Desde la forma tradicional, deberíamos hacer la siguiente construcción:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & 9 & 5 & 3 & 1 & 2 & 5 \\
 & & & & & & \times & & 6 & 2 & 5 \\ \cline{5-11}
 & & & & 9 & 7 & 6 & 5 & 6 & 2 & 5 \\
+ & & & 3 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 7 & 1 & 8 & 7 & 5 & 0 & & \\ \cline{2-11}
 & 1 & 2 & 2 & 0 & 7 & 0 & 3 & 1 & 2 & 5
\end{array}$$

Pero luego vemos que, utilizando los logaritmos, fijándonos en la tabla que contiene las potencias naturales de 5:

n	5^n
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3.125
6	15.625
7	78.125
8	390.625
9	1.953.125
10	9.765.625
11	48.828.125
12	244.140.625
13	1.220.703.125
14	6.103.515.625

n	5^n
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3.125
6	15.625
7	78.125
8	390.625
9	1.953.125
10	9.765.625
11	48.828.125
12	244.140.625
13	1.220.703.125
14	6.103.515.625

Ahora, nos centramos en los valores de las potencias a las que está elevado el 5 en cada factor.

Por la propiedad del logaritmo del producto, sumo las potencias 4 + 9 = 13, y busco el valor que acompañe a n=13, y ése el resultado de la multiplicación.

n	5^n
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3.125
6	15.625
7	78.125
8	390.625
9	1.953.125
10	9.765.625
11	48.828.125
12	244.140.625
13	$\boxed{1.220.703.125}$
14	6.103.515.625

Luego observamos que en el trabajo que trata sobre las consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media realizado por Garnacha León (2012), se sostiene que existen diversos obstáculos en el aprendizaje del concepto de logaritmo, tales como su nacimiento desprovisto de contexto en la naturaleza y en situaciones cotidianas, el relacionamiento posterior con la operación potenciación, la expectativa de linealidad en las operaciones, la presentación de situaciones que se modelan con la función exponencial o el uso de la función logarítmica sólo como su inversa, entre otras. Por esto es que propone una secuencia de actividades para apoyar la construcción del concepto de logaritmo que tienen un hilo progresivo en la multiplicación a la manera egipcia para introducir la propiedad de los logaritmos, para analizar que sumar en una de las columnas implica multiplicar en la otra, y que cualquier base puede servir para el mismo propósito. Luego presenta casos en que la multiplicación se vuelve una adición y la división se vuelve una sustracción, y finaliza con actividades en las que la potenciación se vuelve una multiplicación y la radicación se vuelve una división. Se realiza una propuesta que le otorga importancia a las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas para poder generar un significado más completo y que permita tener acceso a las diferentes aplicaciones del concepto de logaritmo.

De lo analizado, los artículos coinciden en la necesidad de cambiar el enfoque tradicional de la enseñanza del concepto de logaritmo –definición dada, enunciado de ejemplos seleccionados con cuidado y estudiantes que aplican en ejercicios, único rol en el que se las/os pone–, por propuestas basadas en el contexto histórico que dio origen a la conceptualización y que le otorga significado. Este análisis guía mi formulación para la práctica educativa en aula.

Fundamentos Curriculares

En cuanto a la Currícula Oficial, podemos enmarcarnos en las siguientes prescripciones correspondientes a 6° año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria de la Provincia de La Pampa.

En el marco del Eje: en relación con las funciones y el álgebra, recuperamos *La modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones trigonométricas, logarítmicas, parte entera, definidas por partes, valor absoluto y ecuaciones asociadas a ellas*. Esto supone:

- Modelizar situaciones extra matemáticas e intra matemáticas mediante funciones trigonométricas, logarítmicas, parte entera, definidas por partes y valor absoluto.
- Caracterizar la función logarítmica a partir de la función exponencial desde sus gráficos cartesianos y sus fórmulas, abordando una aproximación a la idea de función inversa.

Momentos en la propuesta de enseñanza desarrollada en aulas de 6to año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria

Presento así algunos momentos en el desarrollo de la práctica educativa vinculada a los logaritmos que aportan al análisis. Se llevaron adelante más etapas en cada momento, se formularon otras actividades de estabilización o de control de conceptualizaciones intercambiadas en grupo o de utilización de las calculadoras que, por cuestiones de espacio, no alcanzamos a incluir en este documento.

Momento 1. Hacia la definición de logaritmos y el análisis de algunas restricciones.

Actividad:

Instancia diseñada con el objetivo de que las/os alumnas/os puedan reconocer cuales son las progresiones que contiene las cartas, es decir, que se encuentre el patrón de las series de números que las configuran y las puedan relacionar.

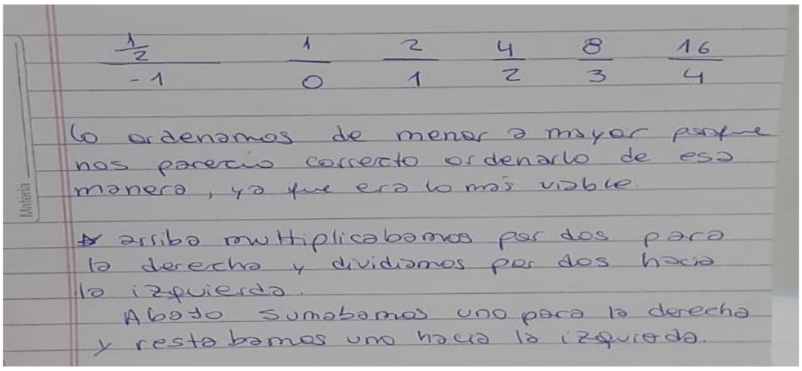
Consigna: organizar las cartas del modo que crean conveniente y dar una breve justificación de porqué lo hicieron de esa manera.

1/2	1	2	4	8	16
-1	0	1	2	3	4

Luego de dado un orden analizar si se puede describir algún tipo de regularidad o si los números de arriba cambian igual que los de abajo.

Una justificación muy recurrente que dan las/os alumnas/os es que intentan ordenar los números de abajo del más chico al más grande. Otra, es que han dado el mismo orden, pero mirando los números superiores, también de menor a mayor. En los casos ensayados mayoritariamente se fijaron en ordenar de menor a mayor los números inferiores.

<table>
<tr>
<td>
Una resolución:



</td>
<td>Se puede observar que el orden que se le da a la primera serie de cartas es el esperado, y se agrega una justificación que abre paso para todo lo que sigue, que es la forma de encontrar una nueva carta.</td>
</tr>
</table>

Actividad:

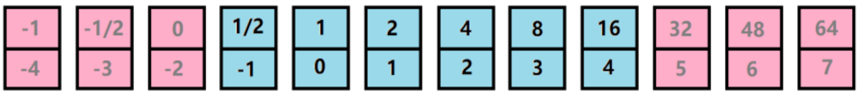
Estación orientada por el objetivo de que las/os estudiantes puedan identificar no sólo la progresión superior y la progresión inferior, sino que construyan la relación entre ellas y puedan completar las siguientes cartas a partir de ello.

Consigna: completar las cartas vacías con los números correspondientes, para extender la serie ordenada anteriormente, con 3 cartas hacia la derecha y 3 hacia la izquierda.

			1/2	1	2	4	8	16			
			-1	0	1	2	3	4			

Como en esta experiencia, pueden surgir algunos inconvenientes al extender las series hacia la izquierda, por la utilización de números negativos y fraccionarios. En este punto colaboran algunas intervenciones como que comparen lo que sucede con la carta (1/2,-1) y la carta (2,1), si tienen alguna relación entre ellas; también fue de ayuda la pregunta acerca de qué información proporciona la carta (0,1).

Una resolución:

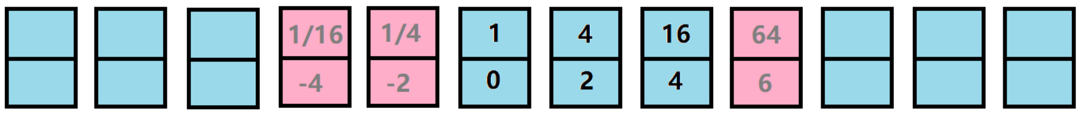


La intervención docente podría ser que observen que sucede en los números superiores de las cartas celestes, si es verdad que siempre se suma por el mismo número cómo ellos hicieron.

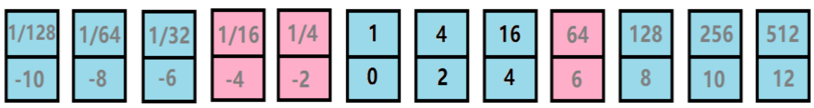
Actividad:

Objetivo: que las/os estudiantes puedan identificar los nuevos patrones que se repiten, y comprender que no necesariamente una serie de elementos tienen que tener los números de abajo consecutivos.

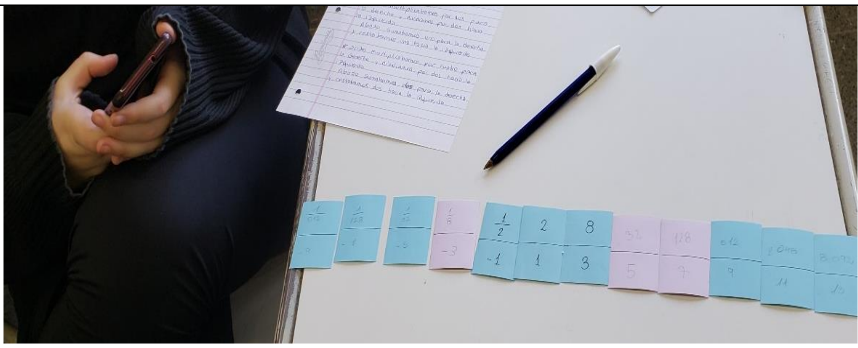
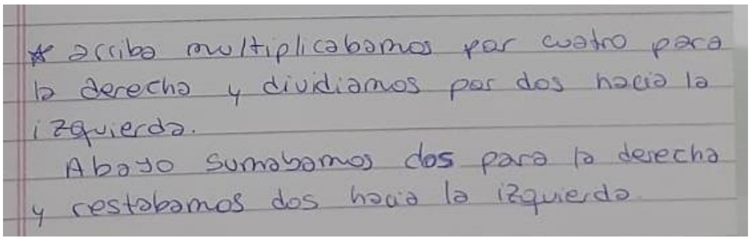
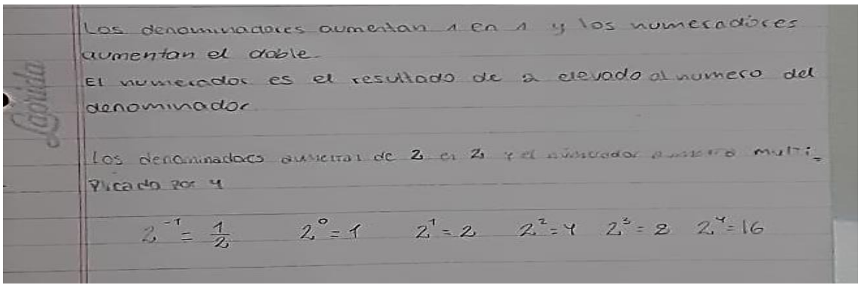
Consigna: Completar las nuevas cartas extendiendo la nueva serie, que surge de quitar 6 cartas intercaladas.



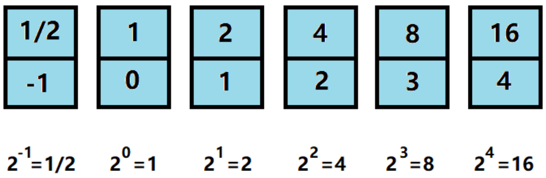
De las respuestas:



Intervenciones que han resultado de ayuda:
. que se revise si el patrón de multiplicar por 2 como hacían antes ahora funciona
. preguntas del tipo: ¿Cómo sabemos que las cartas que agregamos están bien?
. comparaciones entre grupos de algunas de las cartas para que un

<table>
<tr><td></td><td>compañero considere si está bien o mal completada.</td></tr>
<tr><td>

* arriba multiplicabamos por cuatro para la derecha y dividiamos por dos hacia la izquierda.
Abajo sumabamos dos para la derecha y restabamos dos hacia la izquierda.

Los denominadores aumentan 1 en 1 y los numeradores aumentan el doble.
El numerador es el resultado de 2 elevado al numero del denominador
Los denominadores aumentan de 2 en 2 y el numerador aumenta multi-plicado por 4
$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$</td><td>Nuevamente una de las justificaciones para éste nuevo patrón, es la de multiplicar por una constante a los números superiores, y sumar otra constante a los números inferiores.</td></tr>
</table>

En el intercambio grupal, comenzamos a hablar de las series que fueron armando, haciendo hincapié con las/os estudiantes en que el número de abajo, es el exponente de una base, para que resulte el de arriba. Y reescribimos las primeras cartas con las que trabajamos con la forma exponencial que fuimos armando:



Y así presentamos esta operación que está muy ligada con las exponenciales: los Logaritmos.

Los logaritmos, con un ejemplo, expresan que:

$$log_2(8) = 3 \qquad \leftrightarrow \qquad 2^3 = 8$$

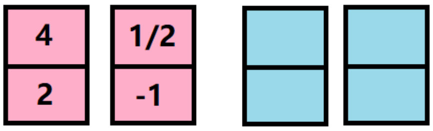
Una vez planteada la herramienta, presento el nombre de la operación y su definición formal, tomando como referencia principal, la definición brindada por Stewart (2007). Identificamos componentes en esa definición y analizamos restricciones y, teniendo en cuenta la expresión del logaritmo $log_a(x) = b$, se enuncian y se van justificando las condiciones por las cuales a debe ser $a > 0,$ a debe ser $a \neq 1$ y x debe ser $x > 0$.

Momento 2. Operaciones con logaritmos y propiedades de la multiplicación y de la división de logaritmos.

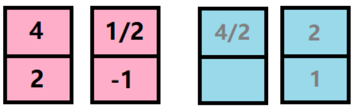
Actividad:

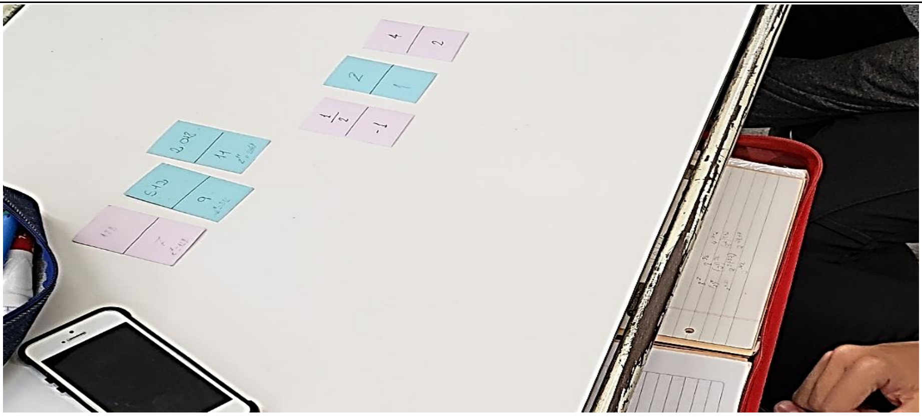
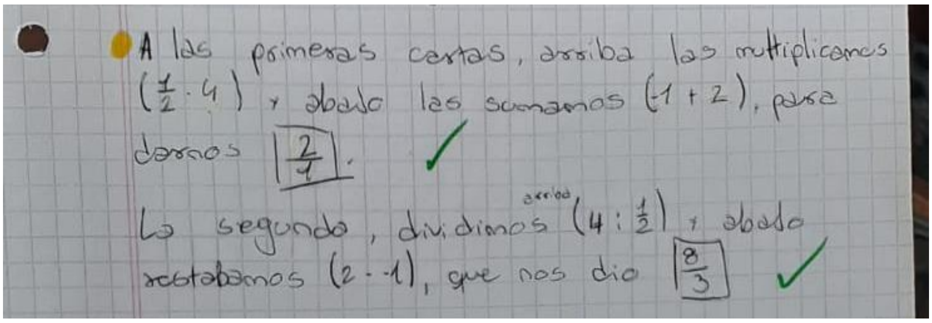
a) Completar una carta vacía, sabiendo que hay que multiplicar los números superiores de las dos cartas escritas.

b) Completar la otra carta vacía sabiendo que hay que dividir los números superiores de las cartas escritas.



En los dos casos, el número de abajo se completa buscando entre las cartas que ya se poseen. Se trabajan las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, y se brindan estas cartas con números pequeños, para que las/os estudiantes puedan operarlas con facilidad y corroborar su resultado con las cartas que ya tienen de las actividades anteriores.

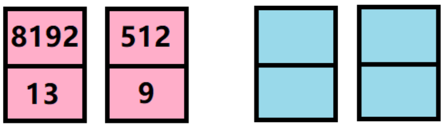
De las resoluciones:	Algunas intervenciones:
	¿qué número es 4/2? ¿4 por ½ va a dar lo mismo que 4 dividido ½? También se

 	propone la comparación entre los grupos cercanos para validar y refutar las cartas completadas por los compañeros.

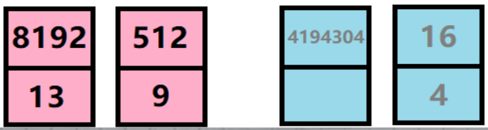
Actividad:

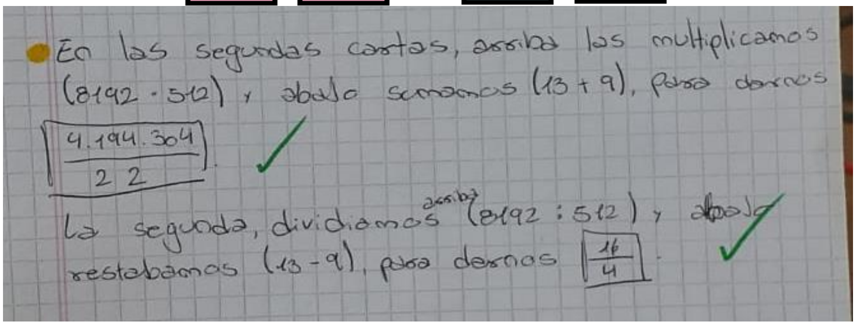
Con el propósito de seguir trabajando hacia las propiedades del logaritmo del producto y del cociente, se ofrecen ahora cartas con números más grandes, para que – al no tener la posibilidad de corroborar el resultado- encuentren el número de abajo sumando y restando los números inferiores de las cartas rosa.

Consigna: Realizar lo mismo que en la actividad anterior, con las nuevas cartas.

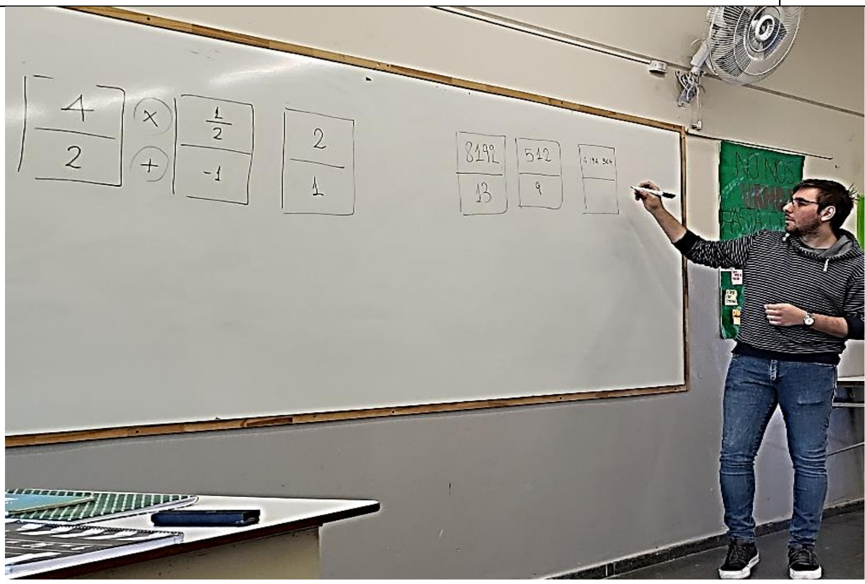


Una resolución:





En esta actividad puede que las/os alumnas/os se traben pensando en qué poner en el número de abajo, pues no tienen una carta para corroborar, pero entonces ayuda la pregunta “¿qué pasaba en los casos anteriores con los números de abajo?”

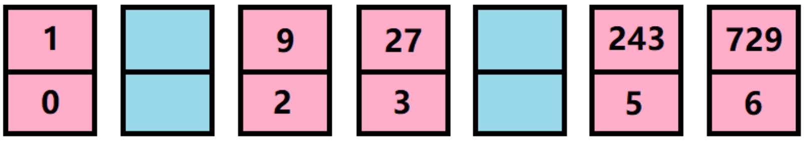


Actividad:

Ahora el objetivo es que las/os alumnas/os puedan identificar la base de la serie de cartas que representan logaritmos y denotarlos.

Consigna:

a) Ordenar las cartas y completar las cartas faltantes.



b) Escribir cada carta en forma de logaritmos.

Una resolución:

1	3	9	27	81	243	729
0	1	2	3	4	5	6

En las segundas cartas, arriba las multiplicamos (8192 · 512) y abajo sumamos (13 + 9), para darnos $\boxed{\frac{4.194.304}{22}}$.

La segunda, dividiamos arriba (8192 : 512) y abajo restabamos (13 - 9), para darnos $\boxed{\frac{16}{4}}$.

Ayudan preguntas del tipo: ¿Cómo armaron la serie anterior?, ¿Notan alguna relación entre los números de abajo y de arriba de las cartas cómo para compararlas?, revisar los logaritmos realizados, y utilizar la igualdad en la exponencial para comprobar si el resultado es el correcto.

Actividad:

Y luego, que puedan aplicar el patrón identificado y las propiedades construidas para encontrar el valor superior.

Consigna: Completar el número superior en la carta incompleta.

1	3	9	27	81	243	729	
0	1	2	3	4	5	6	8

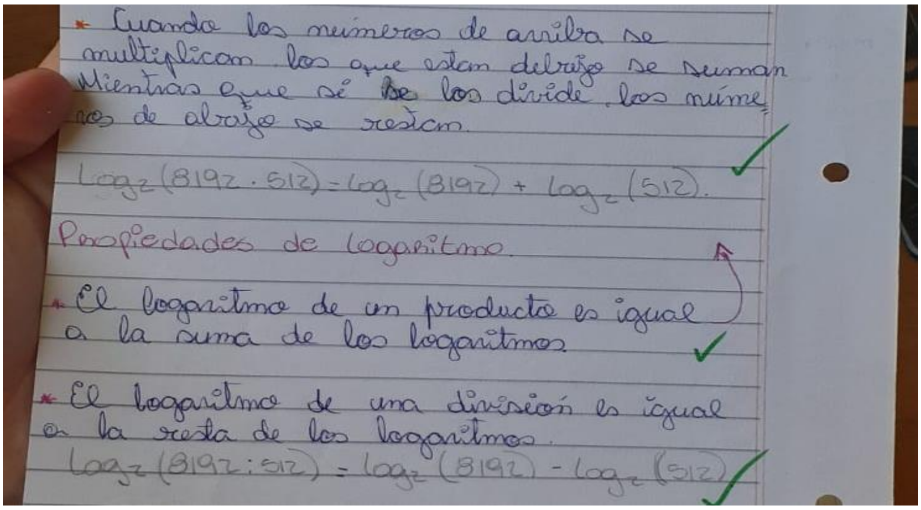
De las resoluciones:

1	3	9	27	81	243	729	3^8
0	1	2	3	4	5	6	8

1	3	9	27	81	243	729	729*9
0	1	2	3	4	5	6	8

Es posible que también continúen la progresión multiplicando 7 veces el 3, arribando al resultado correcto. De llegar de ese modo, se propone que piensen si habría alguna otra forma de llegar.

De aquí surgen las propiedades:


* Cuando los números de arriba se multiplican los que estan debajo se suman Mientras que sí se los divide los números de abajo se restan.

$Log_2(8192 \cdot 512) = log_2(8192) + log_2(512)$.

Propiedades de logaritmo.

* El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos

* El logaritmo de una división es igual a la resta de los logaritmos.

$Log_2(8192 : 512) = log_2(8192) - log_2(512)$

Actividad:

A continuación, en formato de ejercicios de aplicación, se agregan unos ejercicios con el propósito de introducir las propiedades:

> Actividad: Resolver los siguientes logaritmos aplicando propiedades:
>
> $a)\ log_3(27 \cdot 243) =$ $\quad$ $b)\ log_5\left(\frac{5}{125}\right) =$
>
> $c)\ log_a(122 \cdot 31) =$ $\quad$ $d)\ log_4(16 \cdot x) =$
>
> $e)\ log_8(8) =$ $\quad$ $f)\ log_2(2^5) =$
>
> $g)\ log_a(a) =$ $\quad$ $h)\ log_a(a^7) =$

. $log_a(a) = 1$

. $log_a(a^b) = b$

. $log_a(b^c) = c \cdot log_a(b)$

Momento 3. Logaritmos decimales y naturales

Se presentan dos casos particulares en los cuales la base toma valores 10 y e. Es posible que las/os alumnas/os no conozcan el número de Euler, un número irracional como lo es π, que tiene muchas propiedades y permite analizar muchas regularidades, y que gracias a él se explican muchos fenómenos naturales y disciplinares, y que este número fue utilizado por John Napier como la primera base para los logaritmos.

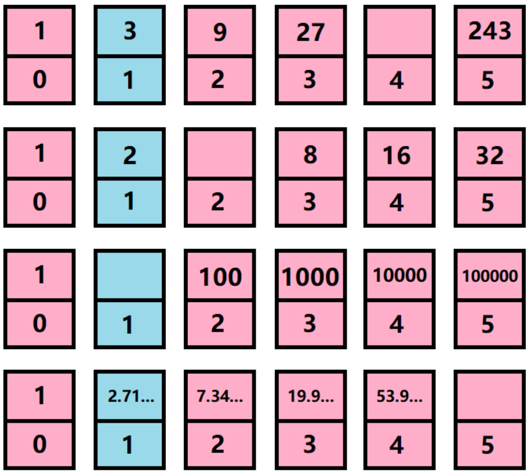
Se brinda una breve explicación acerca de porqué fue útil históricamente el caso particular en el que el valor de la base es 10: "Cuándo no existían las calculadoras, era muy difícil poder anticipar el resultado de los logaritmos, y en eso nos ayuda la base 10. Sabemos que $10^1 = 10$ y del mismo modo $10^2 = 100$ y así siguiendo, es decir, 10^x es un número que empieza con 1 y después tiene x ceros. Esto nos ayuda para anticipar el valor del logaritmo, por ejemplo, si tengo que evaluar $log_{10}(32.165.465)$ puedo tener una idea del resultado mirando simplemente la cantidad de cifras que tiene: 32.165.465 tiene 8 cifras, por lo tanto, el resultado del logaritmo de ese número en base 10, es: $7, \ldots$"

Para esta etapa las cartas continúan resultando un recurso de mucha síntesis.

Actividad:

Objetivo: Que las/os alumnas/os puedan, a partir de las cartas celestes, identificar las bases de las diferentes series y volver sobre la propiedad por la cual $log_a(a) = 1$.

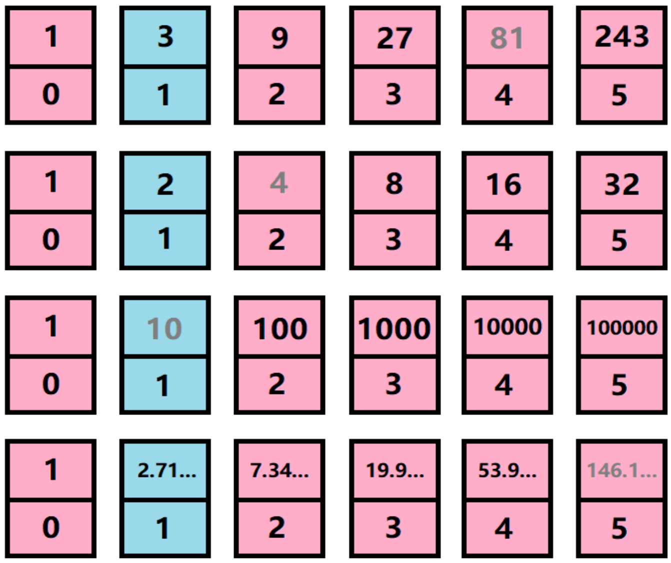
a) Ordenar y completar las siguientes cartas según creas correspondiente:



b) Sabemos que las cartas de abajo representan exponentes, y las de arriba representan potencias. Completar la frase de la familia de cartas celestes:

Cuanto la carta tiene un 1 abajo, el número de arriba es ____, que significa que ____.

Una resolución:	En un intercambio grupal, en el que focalizamos en la serie con base 10, se advierte que, con esa serie es más fácil anticipar los siguientes números pues hay que ir agregando tantos ceros cómo indique el número de abajo. Y definimos el logaritmo decimal como caso particular en que la base toma el valor 10, se presenta la notación particular $\log(x) = b$, sin escribir el subíndice. Luego se focaliza en la serie con base $2{,}71\ldots$, surgen preguntas del tipo ¿qué es ese número y porqué lo estamos utilizando? Este momento en que se presenta el número e da la oportunidad



de comenzar a otorgarle algunos significados –que demandan cuestiones históricas y de nociones de lo irracional y que, en cualquiera de los casos, habilitan que el conocimiento se conciba como construido y a partir de necesidades, antes que como impuesto sin argumentos-.
La calculadora aquí es un instrumento muy útil.
Y definimos el logaritmo natural como caso particular en que la base toma el valor e, se presenta la notación particular : $\ln(x) = b$

Momento 4. Visibilidad de la utilidad de los logaritmos

Instancia que se organiza con el propósito de ofrecer algunos significados e importancias históricas del concepto de logaritmo.

Actividad: Resolver la siguiente multiplicación:

$$4.294.967.296 \cdot 1.048.576 =$$

Se le brinda a cada estudiante la siguiente tabla como ayuda para analizar cómo realizar la operación:

$log_4(1)$	0
$log_4(4)$	1
$log_4(16)$	2
$log_4(64)$	3
$log_4(256)$	4
$log_4(1.024)$	5
$log_4(4.096)$	6
$log_4(16.384)$	7
$log_4(65.536)$	8
$log_4(262.144)$	9
$log_4(1.048.576)$	10
$log_4(4.194.304)$	11
$log_4(16.777.216)$	12
$log_4(67.108.864)$	13
$log_4(268.435.456)$	14
$log_4(1.073.741.824)$	15
$log_4(4.294.967.296)$	16
$log_4(17.179.869.184)$	17
$log_4(68.719.476.736)$	18
$log_4(274.877.906.944)$	19
$log_4(1.099.511.627.776)$	20
$log_4(4.398.046.511.104)$	21
$log_4(17.592.186.044.416)$	22
$log_4(70.368.744.177.664)$	23
$log_4(281.474.976.710.656)$	24
$log_4(1.125.899.906.842.624)$	25
$log_4(4.503.599.627.370.496)$	26
$log_4(18.014.398.509.481.984)$	27
$log_4(72.057.594.037.927.936)$	28
$log_4(288.230.376.151.711.744)$	29
$log_4(1.152.921.504.606.846.976)$	30

Para la resolución, pocas/os estudiantes intentan resolver la multiplicación de forma tradicional, resultando una ardua y tediosa tarea. Se promueve que se utilicen algunas de las propiedades aprendidas de los logaritmos, en particular, la propiedad de la suma de logaritmos, que es igual al logaritmo del producto. También se trabaja con situaciones que permitan reconocer la importancia de la propiedad del cambio de base en la solución de logaritmos.

Momento 5. Ecuaciones logarítmicas

El objetivo es que las/os estudiantes puedan resolver ecuaciones logarítmicas, realizando la conversión de una progresión geométrica a una progresión aritmética a partir de comprender que existe una correlación entre ellas.

Para esto se presenta un experimento con una réplica de un sismógrafo, para el cual trabajamos con la fórmula de Richter: $\log(E) = 1.5M + 11.8$

Para este experimento se cuenta con un dispositivo fabricado para dicho fin, que manipulan las/os alumnas/os, de donde obtienen un valor en una escala que mide la energía que liberaron en el impacto. Luego, mediante la ecuación logarítmica de Richter, deberán encontrar la magnitud (M) del "sismo" que provocaron. Es un experimento muy visual y manipulable, que permite la participación de todas/os sin inconvenientes.

Cada alumna/o tiene la posibilidad de realizar un intento con el dispositivo, y pondremos como un desafío del juego, lograr generar una magnitud M=5 en la escala de Richter. Para esto, damos como dato que, si tiran al tope de la distancia posible, resulta una magnitud M≈10.
Adjunto un video para que se comprenda el funcionamiento:
https://youtube.com/shorts/GvfROsXcWjQ?feature=share

Actividad: A partir de los datos obtenidos en el sismógrafo, leer la energía liberada en la escala brindada, y utilizando la ecuación de Richter, evaluar la magnitud del sismo causado.
Ecuación de Richter: $\boldsymbol{log\ (E)\ =\ 1.5M\ +\ 11.8}$ E=Energía M=Magnitud

Actividad: ¿Cuánta energía les sobro/faltó para llegar a M=5?
En esta actividad se pretende que los estudiantes vuelvan a utilizar la ecuación de Richter, pero ahora dándole valor $|x-5|$ a la Magnitud M, siendo x el valor obtenido de M en su tiro. Luego de esto, obtendrían el siguiente logaritmo para resolver:

$$log(E) = 1.5 \cdot (|x-5|) + 11.8$$

Otra posible solución es que realicen la energía que se necesita para un sismo de Magnitud M=5 y resten el resultado al que ya obtuvieron en el resultado anterior.

$$log(E) = 1.5 \cdot (x) + 11.8 \quad - \quad log(E) = 1.5 \cdot (5) + 11.8$$

Ambas formas son válidas y no tenemos preferencia por la utilización de una u otra, lo que buscamos es que las/os estudiantes comprendan que no son linealmente correspondientes la Energía con la Magnitud, y que siempre que apliquemos un logaritmo, mientras una variable crece de a poco, la otra crece exponencialmente, en concordancia con lo que ocurría con las cartas en las primeras actividades.

Actividad: ¿Cuánta energía se tendría que haber liberado para generar un sismo con la misma magnitud que el que ocurrió el 26 de diciembre de 2004?

En esta actividad se pretende que los estudiantes vuelvan a utilizar la ecuación de Richter, pero ahora dándole valor 9,1 a la Magnitud M. Este valor lo encontrarán luego de investigar en internet qué fue lo que ocurrió ese día y la magnitud del sismo. Luego de esto, obtendrían el siguiente logaritmo para resolver:

$$log\ (E) = 1.5 \cdot (9{,}1) + 11.8$$

Durante la búsqueda de la magnitud del terremoto de Sumatra-Andamán, se encuentran con informaciones acerca de la localización, las víctimas, y demás estadísticas que apunta a despertar intereses. Con esto se busca que se comprenda la gran utilidad de los logaritmos, hasta en situaciones extremas que uno no vincula con estas operaciones matemáticas.

Reflexiones Finales

La propuesta se realiza a partir de un análisis didáctico y editorial de la matemática a enseñar desde distintos puntos de vista y siempre haciendo referencia a bibliografías que refieren a los logaritmos desde dimensiones educativas. A partir de este trabajo, tenemos aportes y fundamentos para nutrirnos y elaborar conclusiones y reflexiones para la enseñanza.

Luego del análisis de varios libros, tanto los usados en la facultad para mi formación como los indagados para revisar actividades y luego de elaborar y llevar adelante la práctica educativa, puedo decir con cuáles hemos seguido una misma lógica de trabajo.

Desde el estudio disciplinar de los fundamentos matemáticos, didácticos y editoriales, se puede advertir que la mayoría de los libros no aportan una carga de significación histórica sobre el concepto de logaritmo, su construcción y la importancia que posee en la actualidad, sino que por el contrario se lo plantea de manera que, quien lo aprende lo mecaniza, y lo toma como un algoritmo matemático.

Pero, teniendo en cuenta lo desarrollado por las/os autores que he tomado como orientación, puedo ratificar la importancia que tiene la comprensión del concepto y su construcción histórica para así construir las bases de nuevos conceptos con mayor fuerza. Es importante que las/os alumnas/os al momento de aprender los conceptos matemáticos, no solo lo vean como tales, sino que se nutran de sentido y que puedan aplicar todo lo aprendido en futuras circunstancias, intra o extra matemáticas, siempre que se busque que ese aprendizaje resulte relevante y así, entusiasme más para seguir aprendiendo.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales. En Abrate, R. y Pochulu, M. (comp.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. 111-135. Villa María: Universidad de Villa María.

Ayres Jr., F. (1989). *Fundamentos de Matemáticas Superiores.* México: Mc Graw Hill.

Allendoerfer, Carl B. y Oakley, C. O. (1990). *Matemáticas Universidad*. Bogotá, Colombia: Kinpres Ltda.

Ariza Velázquez, E.; Espinoza Hernández, N. B.; García Juárez, P; García Tamayo, R.; Herrera Cobián, D.; Palomino Jiménez, C.; Ramírez Hernández, H. D.; Zamora Lima, C. (2013). *Fundamentos de Matemáticas para Ingeniería y Ciencias*. Bogotá, Colombia: Alfaomega Grupo Editor.

Carnelli, G.; Lamela, C. (2006). *Matemática 3*. Buenos Aires: Tinta Fresca.

Cólera Jimenez, J. y De Guzman Ozamiz, M. (1994). *Matemáticas 2 – Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Espinoza, R. F.; Valencia Arvizu, M. A.; Dávila Rascón, G.; García Alvarado, M. G. (2008). *Fundamentos del Cálculo*. México: Garabatos.

Ferrari, M. (2004). *La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo*. En Díaz, Leonora (Ed.), ALME (pp. 45-50). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gacharná León, O. (2012). *Alguna consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* Colombia: Universidad Nacional de Colombia

Itzcovich, H. (2011). *El libro de la matemática 9*. Buenos aires: Estrada.

Kurzrok, L. E.; Comparatore, C.; Altman S. V. (2017). *Matemática II: De la práctica a la formalización*. Buenos Aires: Longseller.

Kurzrok, L. E.; Comparatore, C.; Altman S. V. (2015). *Matemática: Funciones 2*. Buenos Aires: Longseller.

Martínez, M.; Rodríguez, M. (1999). *Matemática*. McGraw-Hill.

Steewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo. (5ta Edición).* México DF: Cengage Learning.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México DF: Cengage Learning.