
ntro TIM - EJE NUMEROS: Segunda Parte
EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
a Sanchez
aller de
oducción a
atemática
Fraction Manipulatives
FRACTION STRIPS
PERCENTAGE STRIPS
FRACTION BARS
TOY THEATER
MATH
READ
ART
MUSIC
Escribe aquí para buscar
19:03 / 1:54:26
Desliza hacia abajo para ver m
da Parte
5/
4/8
Desliza hacia abajo para ver más detalles
Ximena Sanchez
Taller de
Introducción a
Matemática
0
1
2
3
7/3
15/6
8/3
no se encadenan aumentos porcentuales?
ha subido un 10% en 1990, un 8% en 1991 y un 5% en 1992 (dat
ha subido desde comienzos de 1990 hasta finales de 1992?
to se convierte el precio de algo que valía $100 en enero del 90:
1,10 = 110 → 110 · 1,08 = 118,80 → 118,80 · 1,05 = 12
mento ha sido del 24,74% (y no el 10+8+5=23% que, erróneamen
o solución. El error es debido a no tener en cuenta que los tres porcen
ctúan sobre cantidades iniciales distintas).
s: Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales, calcu
s índices de variación y multiplícalos.
a hacia abajo para ver más detalles
Encuentro TIM - EJE NUMEROS: Segunda Parte
EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
Ximena Sanchez
Taller de
Introducción a
Matemática
GeoGebra
4/6
14/21
slide me for denominator!
Showing functioning
33:58 / 1:54:26
Desliza hacia abajo para ver más detalles

Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Ximena Sofía Sanchez
ximenasofiasanchez@gmail.com

Estrategias racionales
Campo de Prácticas, Año 2, Nº 1, octubre 2022
Sección: Artículos, pp. 83-101
ISSN 2118-8787

Estrategias racionales

Resumen
El presente trabajo referencia una propuesta de enseñanza valorada por resultar significativa e innovadora en nuestra formación como residentes del profesorado en Matemática. Las conceptualizaciones se concentran en el campo de los Números Racionales en el marco de un Taller de introducción a la Matemática –al que denominamos TIM hacia 2022–, ofrecido para estudiantes que transitan el último año de la Educación Secundaria o su primer año de facultad. Para su elaboración, en principio se buscan fundamentos formales de la matemática y luego se investiga desde los estudios de especialistas en matemática educativa cuyas consideraciones giran alrededor de los obstáculos al enseñar, qué tener en cuenta o qué recursos utilizar. Con la propuesta diseñada se lleva adelante la práctica para luego, a partir de la propia experiencia, construir nuevas reflexiones. Esta práctica educativa en el taller permite reforzar la importancia de las estrategias.

Palabras clave: propuesta de enseñanza, números racionales, aprendizaje significativo, estrategias.

Rational strategies

Abstract

This paper refers to a teaching proposal valued for being significant and innovative in our training as residents of the Mathematics teaching program. The conceptualizations are focused on the field of Rational Numbers in the framework of an Introductory Workshop to Mathematics -which we call TIM towards 2022-, offered to students in their last year of Secondary Education or their first year of college. For its elaboration, first of all, formal foundations of mathematics are sought and then research is carried out from the studies of specialists in educational mathematics whose considerations revolve around the obstacles when teaching, what to take into account or what resources to use. With the proposal designed, the practice is carried out and then, from the experience itself, new reflections are constructed. This educational practice in the workshop reinforces the importance of strategies.

Keywords: Teaching proposal, rational numbers, significant learning, strategies.

El campo de los racionales desde miradas relacionales

El presente trabajo se desarrolla con e objetivo de analizar distintas posibilidades para la enseñanza de conceptos vinculados al conjunto de los Números Racionales. El interés reside en metodologías que no sean, como menciona Sadovsky (2015), con comunicación de mecanismos aislados que logran en las/os estudiantes un vacío de sentido. La autora menciona que es importante desafiar al/la alumno/a, proponerle situaciones que él/ella visualice como complejas, que la/o animen a atreverse, que inviten a explorar, a pensar, a poner en juego los conocimientos previos y que los lleven a conectarse entre compañeras/os, intercambiando posibles resoluciones.

Desde esa concepción, con este trabajo se propone el análisis de libros matemáticos universitarios sobre las definiciones y demostraciones dentro del conjunto de los racionales, con contenidos que rara vez se trabajan en el nivel secundario como, por ejemplo, la densidad y la representación decimal según la fracción irreducible. Así mismo, el análisis de documentos, informes, tesis sobre la enseñanza de los racionales, en los que se mencionan diferentes estrategias para darle sentido al contenido. Se incluyen también algunos recursos tecnológicos que fueron seleccionados a partir de estos fundamentos de la enseñanza.

En los materiales Curriculares de la provincia de la Pampa se desarrolla este contenido en el Eje de Números en todos los años del secundario. Al ser tan extenso hay que realizar un recorte para el taller de introducción a la matemática. Comienzo con los racionales como conjunto y hago un desarrollo de los números fraccionarios: como fracciones equivalentes para reducir, simplificar o ampliar, desde las diferentes estrategias para comparar fracciones, apelando a la representación en la recta numérica y considerando las operaciones con fracciones junto con sus propiedades. Una de las conceptualizaciones propias de este conjunto que se trabaja es la de densidad en los racionales. Con respecto a las expresiones decimales de los números racionales se ven los tipos de decimales, las estrategias para traducir de un número decimal a una fracción, criterios para ordenar números desde sus expresiones decimales y algunas lógicas para identificar qué representación decimal tendrá una fracción irreducible.

Debates desde fundamentos matemáticos

En el libro Nociones del álgebra de María Luisa Gastaminza (1970), se puede recuperar una de las propiedades de los racionales, la de densidad. No es tan común que se trabaje este contenido en secundaria.

(3) Q es denso en R. Entre dos números reales siempre existe un número racional, es decir, si a,b ϵ R y a < b existe x ϵ Q tal que a < x < b.

Esto equivale a decir que entre dos números reales existen infinitos racionales.

Para demostrarlo es necesario usar la propiedad de R que nos falta enunciar: el axioma de completitud.

Imagen 1: (Gastaminza, 1970, pág. 52)

De este libro rescato la definición con notación matemática de decimales finitos y periódicos (Imagen 2). Es una definición un poco diferente a lo que se da en secundaria, ya que, los decimales finitos serían los que llamamos decimales exactos.

Definición 1. Un decimal es una sucesión infinita de enteros $a_o.a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots.$ tales que: $a_o \geq 0$ y $0 \leq a_i < 10$ para i=1,2,3,.....

Un decimal se dice finito si todos los a_i son cero a partir de un índice en adelante, $a_i = 0$ para $i > n$. Por ejemplo, 7.25000....... = 7.25 es un decimal finito. Un decimal se dice periódico si $a_i = a_{i+p}$ para todo $i > n$, n y p enteros fijos.

Por ejemplo, 2.3465172172......... es un decimal periódico. En este ejemplo se puede tomar $n = 4$ y $p = 3$.

Observemos que un decimal finito es periódico.

Dado un decimal $a_o.a_1a_2a_3 \ldots\ldots.$ se pueden considerar los números racionales de la forma $a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{a_k}{10^k}$ para k = 0,1,2,3,......

Imagen 2: (Gastaminza, 1970, pág 77)

La autora en una observación expresa que un decimal finito es periódico ya que se repite infinitamente el cero. A partir de esa observación y de la definición 1, enuncia un corolario (Imagen 3) y da un ejemplo mostrando como se repite el cero infinitamente (Imagen 4). En secundaria decimos que es exacto porque tiene un final, y según la autora esa no es la definición correcta. Revisar conceptos de referencias de autores en Matemática nos invita a reflexionar si las definiciones son únicas.

1°). Todo número racional tiene una representación decimal y ésta es periódica.

Imagen 3: (Gastaminza, 1970, pág 78)

Supongamos que se trata ahora de representar en forma decimal el número $\frac{19}{8}$.

$$\begin{array}{l|l} 19 & 8 \\ \hline \;30 & 2.37500\ldots\ldots\ldots \\ \;\;60 & \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;0 & \\ \;\;\;\;0 & \\ \;\;\;\;\;. & \\ \;\;\;\;\;\;. & \\ \;\;\;\;\;\;\;. & \end{array}$$

Imagen 4: (Gastaminza, 1970, pág 80)

La autora propone expresiones decimales periódicas finitas y expresiones decimales periódicas infinitas a diferencia de lo que leemos en los libros de texto habituales como expresiones decimales exactas o expresiones decimales periódicas. Considero que la definición que nos presenta Gastaminza va más allá de los objetivos de las escuelas secundarias, si decimos por ejemplo que 1,5 es periódico sin una demostración podemos generar confusión en las/os alumnas/os y colegas que estos estudiantes tengan a futuro.

Por otra parte, Gastaminza (1970) también nos muestra qué condiciones debe cumplir un denominador *b* para que la expresión en fracción irreducible admita una representación decimal finita.

En particular, si $\frac{a}{b}$ es un número entero, es decir si b = 1 , aplicando el procedimiento indicado resulta que el número entero a está representado por el decimal a.0000..............

Notemos que si en los b primeros pasos se obtiene un resto nulo entonces de ahí en a delante todas las cifras decimales son cero y la representación decimal de $\frac{a}{b}$ es un decimal finito. Si en cambio ninguno de esos restos es nulo entonces el decimal que representa a $\frac{a}{b}$ es periódico infinito. ¿Cuándo se presenta uno u otro caso?.

Imagen 5: (Gastaminza, 1970, pág 81)

Y, para la identificación de las denominadas por la autora como representaciones decimales finitas, queda expresado:

Veamos que un número racional $\frac{a}{b}$ admite una representación decimal finita si y solo si b es de la forma $b = 2^r.5^s$, con $r \geq 0$, $s \geq 0$.

Si b es de esa forma entonces se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{2^s.5^r.a}{10^{r+s}}$$

y todo número racional de la forma $\frac{m}{10^t}$ tiene una representación decimal finita. En efecto, expresando el entero m en base 10 es

$$m = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots\ldots + a_1.10 + a_o$$

y dividiendo por 10^t se ve que se obtiene una representación decimal finita de $\frac{m}{10^t}$.

Recíprocamente, supongamos que $\frac{a}{b}$ tiene una representación decimal finita $a_o.a_1\ldots a_n$

Entonces $\frac{a}{b} = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^n}$. Sumando será $\frac{a}{b} = \frac{m}{10^n}$;

luego $10^n.\ a = b.m$

Como podemos suponer a y b primos entre sí de la última igualdad resulta que b divide a 10^n y en consecuencia los únicos factores primos que admite b son 2 y 5 , es decir $b = 2^r.5^s$ con $r \geq 0$, $s \geq 0$.

Imagen 6: (Gastaminza, 1970, pág 82)

No es usual que esta estrategia se presente en los libros de texto y que los docentes lo trabajen en el secundario. En las ocasiones que se presenta, lo enuncian como un resultado sin sentido, sin que los alumnos puedan acceder a su demostración.

Inquietudes de fundamentos de matemática educativa

En este apartado expongo reflexiones de expertas/os en matemática educativa que son de interés para el presente trabajo, con respecto a la enseñanza de los racionales.

Así, la *equivalencia de fracciones* es una de las primeras cuestiones por las que hay tantos errores de comprensión en los alumnos, así también cuando hablamos de ampliar y de simplificar. En el aprendizaje de las fracciones equivalentes, la mayoría de las/os alumnas/os son capaces de reconocerlas cuando se presentan de forma geométrica o cuando el factor de multiplicación entre fracciones es un número sencillo y entero (2,3,4,5). Pero aparecen diferencias entre los procedimientos para construir fracciones equivalentes y las posibilidades de ordenar fracciones. Aquí, en muchas ocasiones, las/os estudiantes no saben si las fracciones son equivalentes o una es múltiplo de la otra. Esto pone de manifiesto la importancia del elemento identidad, 4/4 por ejemplo, para ir de una fracción a otra, multiplicando y dividiendo por el mismo número. Las/os chicas/os tienden a pensar que solo han multiplicado por 4, por lo que con frecuencia argumentan que $\frac{12}{16} > \frac{3}{4}$, ya que relacionan a menudo multiplicar con aumentar y dividir con disminuir. El uso de gran variedad de casos de equivalencia hace que aumente la habilidad de los chicos para hacer frente a tareas simples que involucren el uso de fracciones equivalentes. Por ejemplo, podría recurrirse al plegado de papel (Imagen 7) para inculcar la noción de equivalencia. (Gonzales del Olmo, 2015, p. 46)

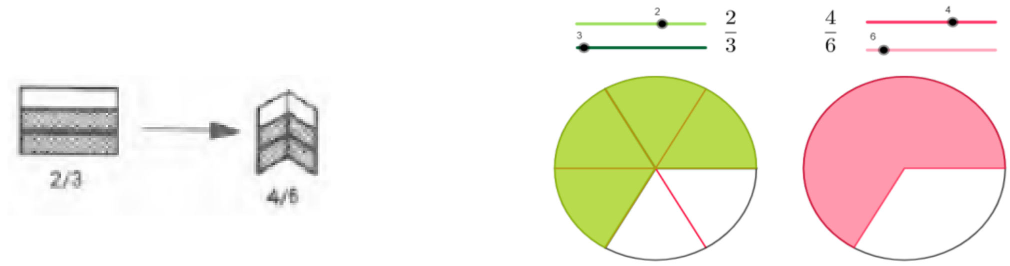


Imagen 7

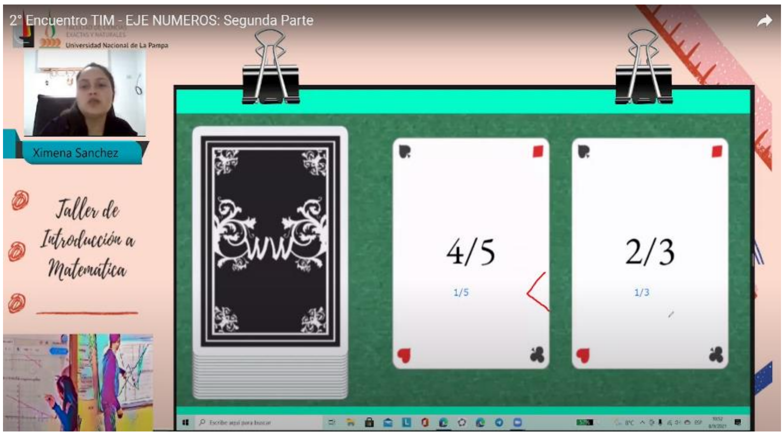
No se considera conveniente enseñar en un primer momento la regla para comprobar la equivalencia de fracciones siguiente: $a/b = c/d \Rightarrow axd = bxc$. Es evidente que esta regla carece de justificación en el modelo de medida, porque no tienen sentido las multiplicaciones $axd = bxc$, cuyos factores son números de subunidades y las veces que se ha fraccionado en partes iguales la unidad. Se trata de una regla que es cierta pero que se enseña como una técnica operatoria que no está justificada en el significado de medida, es decir, aquellas fracciones que se escriben de diferente modo pero que miden mismas cantidades de magnitud (Parra Pellicena, 2016, pp. 89).

La autora nos cuenta la importancia de no enseñar reglas sin sentido para los alumnos, sin justificación. Es por esto que en la presentación teórica del taller de introducción a la matemática no se enseña primero esa regla, sino que se la recupera entre lo conocido en la escuela luego de darle sentido.

Orden en las fracciones. Continuando con algunas complejidades de las fracciones, es muy común en matemáticas realizar mecánicamente un ejercicio. Para esta propuesta también realizo una revisión respecto de qué tener en cuenta al ordenar fracciones para que esto no sea solo seguir un algoritmo vacío de significados.

En ese camino, poder decidir entre dos números cuál es mayor y cuál es menor, permite vincular ideas de los números racionales, ya sea en su expresión fraccionaria como decimal. Cuando se buscan estrategias de comparación de fracciones estamos fomentando que las/os chicas/os puedan buscar estrategias contingentes a los números utilizados. Con esto queremos decir que no estamos esperando que aparezca un único método de comparación. A modo de ejemplo, si el único método que aparece como óptimo para comparar fracciones es aquel que permite buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador, ante la posibilidad de comparar 253/120 y 7/2, pierde su efectividad. En este caso es posible analizar que la primera fracción está entre 2 y 3 y sin embargo la segunda se encuentra entre 3 y 4 (Lamela et al., 2016, p. 20).

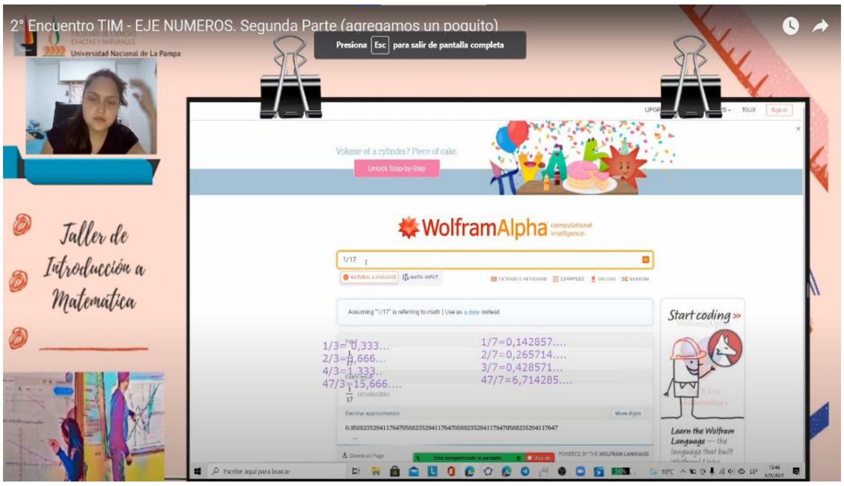
Según Horacio Itzcovich et al (2018) para comparar dos fracciones y que las/os alumnas/os apelen a diferentes recursos que no involucren el algoritmo convencional para la producción de fracciones equivalentes, se seleccionan los datos de manera que el hecho de apelar a la representación gráfica de las mismas o sus equivalencias contenga un grado de dificultad e incertidumbre que los impulse a desarrollar otras estrategias de resolución (pp. 31-33).



A partir de considerar los señalamientos de todas/os las/os autoras/es con respecto a las estrategias que deben desarrollar los alumnos, en la práctica de aula se buscan convenientemente fracciones para que las/os alumnas/os al comparar, por ejemplo, utilizando la recta numérica o graficando, no alcancen a tener certeza de cual es mayor, también se eligen para que aparezcan las siguientes estrategias: si tengo una fracción menor que un entero y otra mayor que un entero será mayor la que se sea mayor que un entero, si dos fracciones tienen diferente numerador y denominador ambas muy cerca de la unidad comparo lo que me falta para completar la unidad, si dos fracciones tienen igual numerador será mayor la que tiene menor denominador, la presencia de una fracción intermedia es aplicable cuando una de las fracciones excede y otra es menor que una fracción conocida.

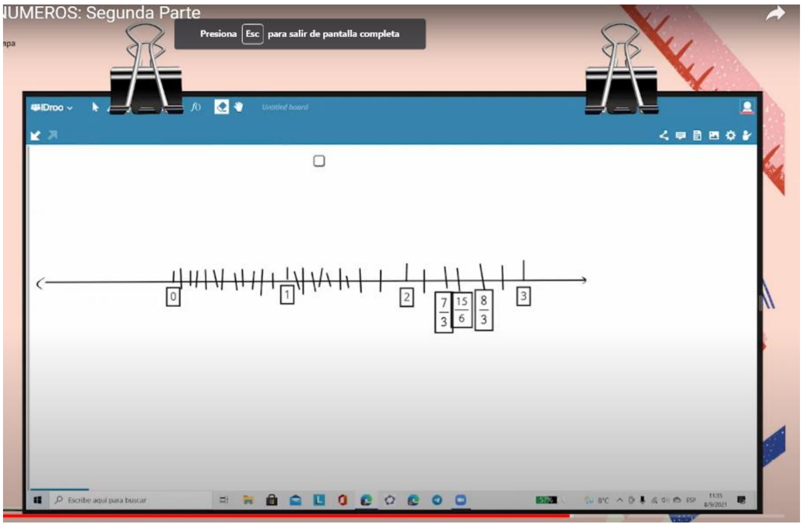
Expresiones decimales. Un error muy común, incluso con chicas/os que están terminando el secundario -ya que pude identificarlo en mi grupo del TIM-, es el que señala Cecilia Lamela (2016) cuando expresa que “pensar que una expresión decimal es mayor cuantos más números tiene detrás de la coma sin advertir el valor que ocupa cada cifra detrás de la coma” (p. 20). En este sentido, también resulta un aporte y nos ayuda a tomar decisiones en relación a las situaciones que presentamos a las/os estudiantes las descripciones de otros errores habituales identificados. Un grupo de ellos son los errores relacionados a comparar y establecer las relaciones de: “mayor qué”, “menor que” e “igual que”, en se suelen interpretar a los decimales como pares de enteros. Por ejemplo, si se les pide comparar 4,5 y 4,15, muchas/os estudiantes concluyen que 4,15 es mayor porque 15 es mayor que 5, es decir observan los números después de la coma como enteros. Este tipo de error está muy relacionado con el valor posicional de los decimales, pues para las/os estudiantes no es posible hallar por ejemplo un número entre 4,2 y 4,3 dado que, aun los siguen viendo como números naturales y es por ello imposible encontrar un número con tales características. Para ello deben tener en cuenta el valor posicional de cada número y saber distinguir las décimas, centésimas y de las milésimas (Albornoz Zappata et al, 2014, p. 13).

Las expresiones decimales son muy complejas es por esto que aparecen en más de un problema para su enseñanza. En ese sentido, otra de las dificultades frecuentes que acarrean los alumnos de educación secundaria, que persiste aún en estudiantes que ingresan a la Universidad, deviene del hecho de considerar que un número es irracional cuando no se le encuentra con relativa facilidad un período a su expansión decimal. Incluso, subyace la idea de que el período de cualquier número racional debe contener sólo unos pocos dígitos, por lo cual, en muchas de las expansiones decimales que se obtienen con una calculadora tienden a reforzarse estas hipótesis, en tanto observan que no existe una aparente relación en la secuencia de números que muestra el visor (Pochulu, 2007). Es por esta razón que utilizo en mi práctica un software como Wolframalpha que es de mucha utilidad para analizar fracciones como, por ejemplo $\frac{1}{17}$, que tiene 16 cifras en su período. Con esto se intenta debatir acerca de esa creencia de que los períodos decimales tienen pocos números.



Propiedad de densidad de los racionales. Esta propiedad de los racionales no es habitual que esté en los libros de texto y que se enseñe en el secundario, aunque es fundamental para la comprensión del conjunto racional, lo caracteriza y permite comprender otros conceptos. La autora Cecilia Lamela (2016) explica la importancia y complejidad de su enseñanza:

La noción de densidad permite profundizar el estudio de los números racionales. Por un lado, se reinvierten las estrategias de comparar y ordenar números para poder encontrar otro número entre dos dados, ya que esta tarea obliga a encontrar un número distinto a los que se dan y que cumpla a la vez que tienen que ser menor que el mayor de los números y ser mayor que el menor de los números. Por otro lado, comenzar a discutir y profundizar esta idea permite comprender la diferencia entre los conjuntos numéricos que los chicos vienen estudiando. En el conjunto de los números enteros, siempre existe un número entero anterior y uno siguiente inmediatos. Sin embargo, debido a la propiedad de densidad, no es posible encontrar un número racional anterior ni siguiente inmediato de otro número racional. Esta noción es compleja de atrapar y muchas veces las/os chicas/os van y vienen sobre estas cuestiones. Será necesario entonces brindar a las/os estudiantes el tiempo que sea necesario para poder revisarlas una y otra vez. A su vez, proponer un estudio sobre la noción de densidad permite cuestionar creencias que posiblemente construyeron nuestros estudiantes al trabajar con números enteros, por ejemplo, relacionar la noción de infinito con "algo muy grande" en lugar de algo que "no es posible de contar". Sin embargo, en el conjunto de los números racionales es posible encontrar una cantidad infinita de números en un intervalo acotado. Es decir, entre 1 y 2 hay infinitos números aun cuando es posible "comenzar en 1 y finalizar en 2". Esta idea de una cantidad infinita de números en un intervalo acotado puede ser disruptiva. Por último, la idea de densidad posiciona a las/os chicas/os en un mejor lugar al momento del estudio de funciones cuyos gráficos tienen asíntotas ya que los estudiantes pueden comprender "que me puedo acercar tanto a la asíntota como quiero y no tocarla". Del mismo modo, esta idea podría ayudar a entender el concepto de límite de una función (p. 23).



Un momento de la práctica para reflexionar sobre los aprendizajes

Mientras realizo este trabajo, aprendo contenidos y estrategias que, cuando estuve en el secundario, no se trabajaron de manera que, como alumna explorara y sacara conclusiones. Uno de estos aprendizajes es que, a partir del denominador de una fracción irreducible puedo saber si su representación decimal será exacta, periódica pura o periódica mixta. La autora Gastaminza explica que, si los únicos factores primos que admite el denominador b son 2 y 5, su representación decimal será finita (exacta). Investigando en libros de texto, y analizando casos concluí que, si el denominador de una fracción irreducible no admite factores primos 2 ni 5, su representación será periódica pura, si admite factores primos como 2 o 5 y además otro factor, será periódica mixta.

Otro de mis aprendizajes está en las diferentes estrategias que hay para poder comparar fracciones y ordenarlas; siempre pensé que la única manera de hacerlo era con el típico algoritmo de buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego solo comparar los numeradores. Las diferentes estrategias que pude investigar son: si tengo una fracción propia y otra impropia será mayor la fracción impropia, si dos fracciones tienen diferente numerador y denominador ambas muy cerca de la unidad comparo lo que me falta para completar la unidad, si dos fracciones tienen igual numerador será mayor la que tiene menor denominador, la presencia de una fracción intermedia es aplicable cuando una de las fracciones excede y otra es menor que una fracción conocida.

Ésta ha resultado una experiencia de aprendizaje tanto de las/os alumnas/os del TIM como para mí, lo presencié en los prácticos al realizar un ejercicio en particular para ordenar números decimales. El enunciado era el siguiente:

11. Ordenar de menor a mayor los siguientes números decimales:

$$-2{,}090;\ -2{,}1;\ -2{,}091;\ -2{,}0901;\ -2{,}092;\ 3{,}001;\ 3{,}009;\ 3{,}09;\ 3{,}0012$$

El problema surgió cuando no sabían dónde ubicar el -2,0901 teniendo ya ordenados -2,1; -2,092 y -2,091. En primer lugar, indicaron el siguiente orden para los números negativos:

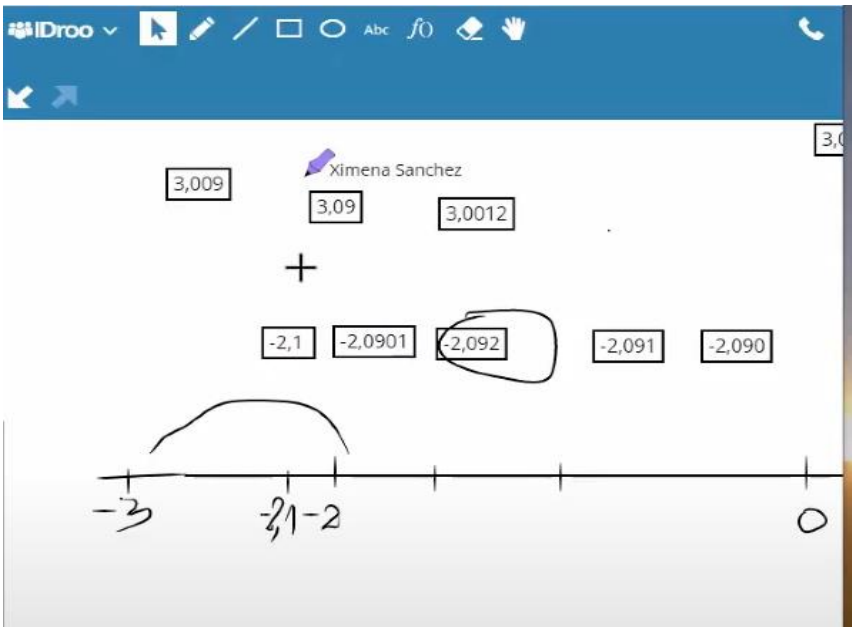


Imagen 7: captura de pantalla de la clase práctica del taller de introducción a la matemática 2021.

Se puede ver que ubican el -2,0901 entre -2,1 y -2,092. Para que se den cuenta de que ese orden está mal se trata de que busquen números entre -2,1 y -2,092 que no sea el número que ellos ubican. Los alumnos responden -2,095 y -2,099, en ese momento se vuelve a preguntar si les parece bien que -2,0901 esté entre -2,1 y -2,092, y además cerca de qué números ya que agregaron el -2,095 y -2,099.

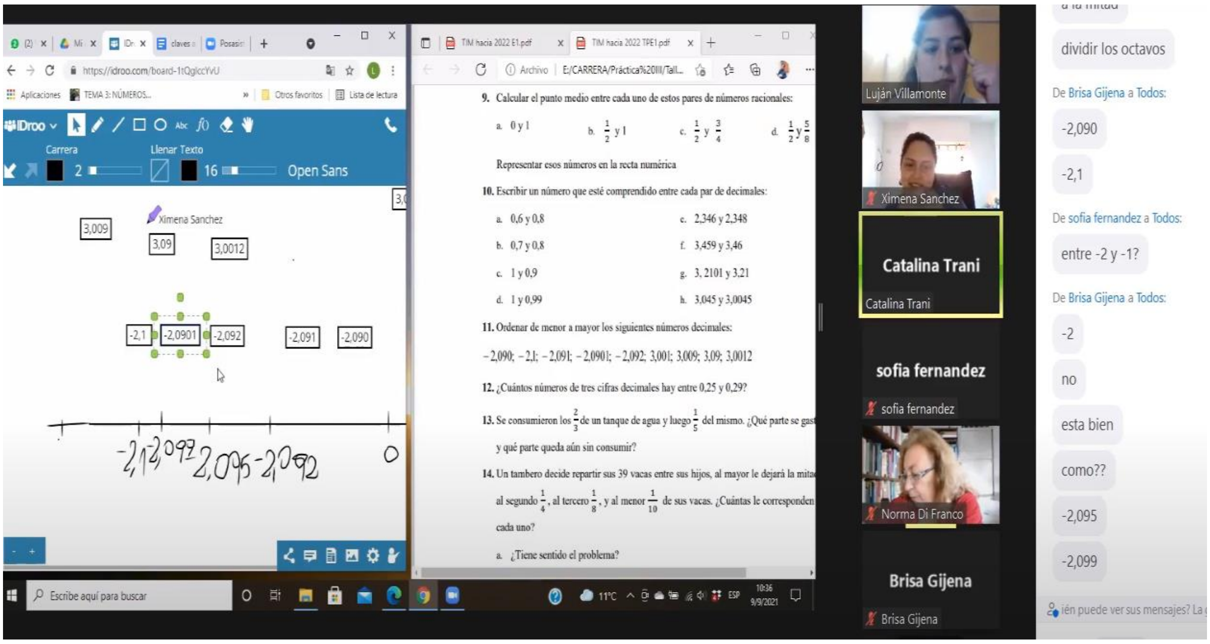


Imagen 8: captura de pantalla de la clase práctica del taller de introducción a la matemática 2021.

Una alumna nos dice "es raro, no te puedo decir por qué", nos indica que el -2,0901 no está bien ubicado pero que tampoco sabe dónde ubicarlo.

Luego esta misma alumna aporta que a -2,0901 si se lo imagina en fracción estaría dividido en partes más chiquitas que los demás números. Entonces lo que hacemos es pasar todos los decimales a fracción.

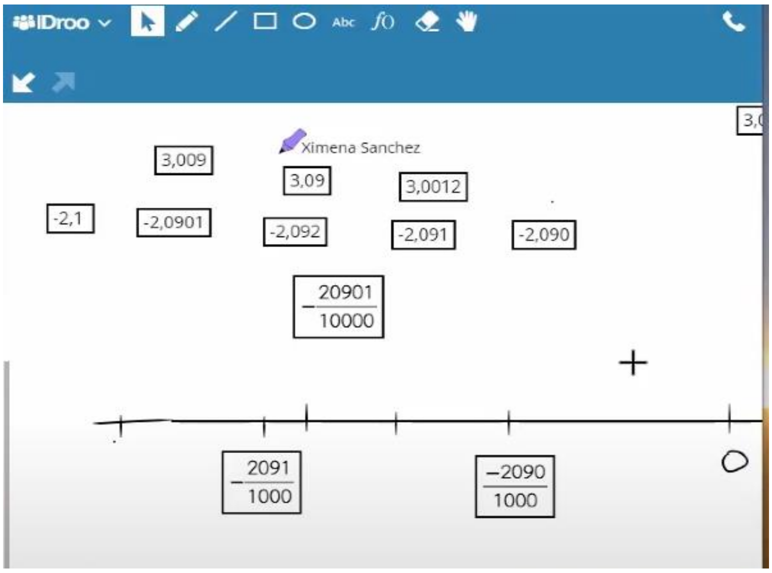


Imagen 19: captura de pantalla de la clase práctica del taller de introducción a la matemática 2021.

Se le menciona a la alumna que tanto $\frac{-2091}{1000}$ y $\frac{-2090}{1000}$ son fáciles de comparar, en lo que ella nos responde que sí ya que sus denominadores son iguales. En esto advierte que puede hallar fracciones equivalentes de estas últimas dos fracciones con denominador 10000, quedándonos todas las fracciones con ese denominador.

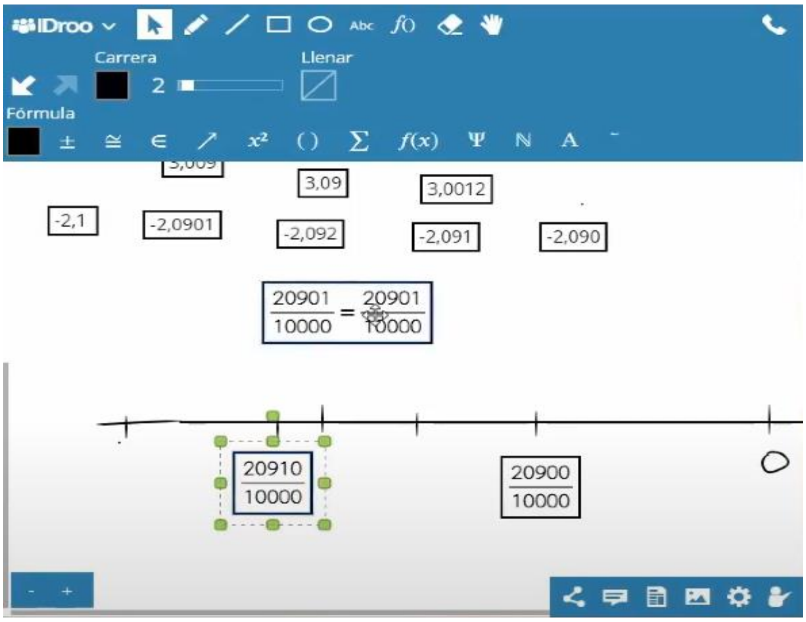


Imagen 10: captura de pantalla de la clase práctica del taller de introducción a la matemática 2021.

Con esto nos basta con comparar solo los numeradores, se observa que al buscar equivalencias a los que tenían 3 decimales después de la coma se les agregó un cero para que pueda ser más sencillo compararlo con el número que tiene 4 decimales después de la coma. Luego se arma la estrategia para comparar decimales, "pueden agregar tantos ceros a la derecha de los decimales que les sirvan para poder comparar". Cabe aclarar que conocía esta estrategia, pero nunca supe de dónde venía, es por esto que al principio digo que es un aprendizaje para mí. Y en esta clase, con esta alumna en particular pude descubrirlo y darle un poco más de sentido. Así como seguro que a los mismos alumnos les fue significativo descubrir esta estrategia por sí mismos.

Recursos, también tecnológicos

Al momento de la presentación utilicé dos applets para poder trabajar con fracciones equivalentes. El primero lo utilicé para que los alumnos puedan hallar fracciones equivalentes a partir de manipular diferentes piezas. Fue muy útil con respecto a que cada alumno podía entrar desde su computadora y explorar las diferentes posibilidades. Además, revisar las ideas que se construyen en el secundario acerca de qué pasa gráficamente cuando dos fracciones son equivalentes (Imágenes 8 y 9).

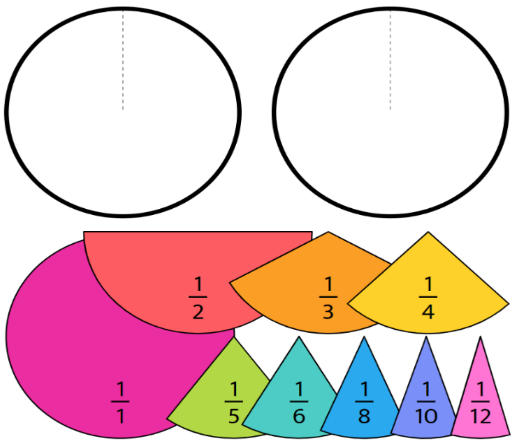


Imagen 8

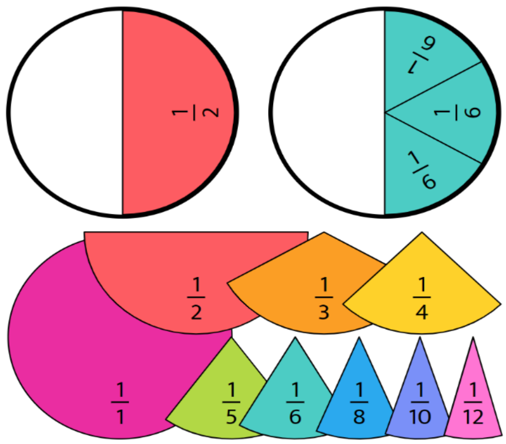


Imagen 9

El otro applet lo utilicé para trabajar con "simplificación" y "amplificación" de fracciones. En él disponíamos de dos representaciones gráficas de fracciones y podíamos trasladar tanto el numerador (color) como el denominador (porciones) de una de las representaciones y superponerla en la otra (Imágenes 10 y 11).

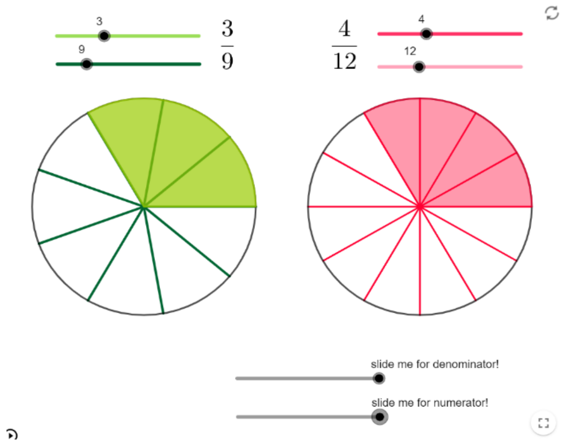


Imagen 10

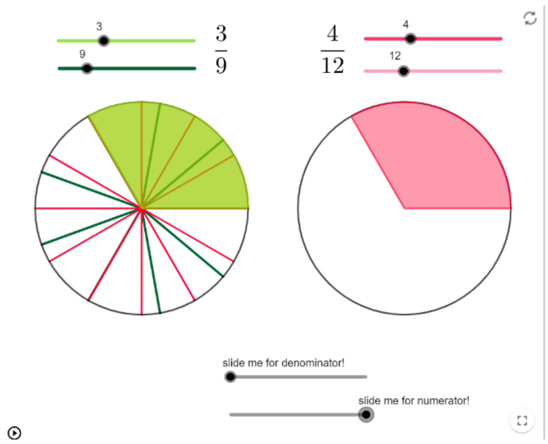


Imagen 11

Con la ayuda de este applet pude mostrar a las/os alumnas/os cómo, dos fracciones que a simple vista no parecen equivalentes, sí lo son pues “ocupan la misma parte del entero”. Y al superponer el denominador de $\frac{4}{12}$ sobre $\frac{3}{9}$ podemos ver como en una porción de $\frac{1}{9}$ entran 1 y $\frac{1}{3}$ de las porciones de $\frac{1}{12}$, con lo que podemos concluir que para “ampliar” $\frac{3}{9}$ a $\frac{4}{12}$ debe hacerse a través del número $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

También, teniendo en cuenta que el objetivo de la planificación es que los alumnos armen sus propias estrategias, como recurso se utilizan cartas con fracciones para que comparen, digan cual fracción es mayor y fundamentar con sus conocimientos su elección. Cabe aclarar que las cartas fueron acomodadas convenientemente para que aparezcan estos criterios de comparación de fracciones.

- La idea no es que solo utilicen los criterios básicos de comparación:
- Dos fracciones con igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
- Mismo numerador diferente denominador, es mayor la que tiene menor denominador.

Si no, que piensen otros como:

- Fracciones con numerador 1, es mayor la que tiene menor denominador.
- Una fracción con numerador mayor a su denominador es más que un entero. (Imagen 12)
- Utilizar una fracción conocida (como $\frac{1}{2}$) para compararla con las demás. (Imagen 13)
- Dos fracciones de diferente denominador y numerador, mayores que la mitad y menores que un entero, comparo sus complementos.
- Dos fracciones de diferente denominador y numerador, menores que la mitad, buscar equivalencias que me ayuden a comparar.

Imagen 12

Imagen 13

Estas estrategias tienen como sentido que luego las/os alumnas/os las hagan extensivas para poder comparar fracciones con números grandes, ya que lo importante es que se entienda la relación que hay entre el numerador y el denominador a partir de analizar fracciones más sencillas.

Se les presentan fracciones con números grandes y ellos lo primero que hacen es simplificarlas. A partir de allí se pretende que analicen e identifiquen las relaciones que tienen los denominadores con los numeradores. Por ejemplo, en la Imagen 12 tenemos la fracción $\frac{3577}{2555}$ que, simplificada, nos queda $\frac{7}{5}$ y donde claramente el numerador es mayor que el denominador, permitiendo identificar una fracción mayor a un entero. Ya con la siguiente fracción no necesitan simplificarla para advertir que es menor que un entero. En la Imagen 13 tenemos dos fracciones menores a un entero, y al simplificarlas tenemos $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Se pretenden que comparen estas dos con la fracción $\frac{1}{2}$, la primera es mayor a $\frac{1}{2}$ y la segunda menor a $\frac{1}{2}$.

Otros ejemplos de cartas que se les pueden presentar de fracciones con números grandes son aquellas donde el denominador sea el doble o el triple del numerador, y ellos utilicen esto para que a simple vista digan que son fracciones equivalente a $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$, a partir de allí comparar con lo que ya conocen.

Reflexiones Finales

El proceso de elaboración de la propuesta de enseñanza que presento en este trabajo y su desarrollo en entornos de educación virtualizada en el Taller de introducción a la Matemática han significado un recorrido con algunas limitaciones ya que planificamos para el desarrollo de todos los ejes matemáticos del taller en tres meses, e individualmente tenemos muy poco tiempo para presentar nuestra temática. Esto nos condiciona en la cantidad de contenido que desarrollamos y nos demanda reflexionar qué cuestiones vamos a priorizar en función de la lógica de la secuencia y de la mirada que tenemos de lo educativo. Con todo, pudimos profundizar detenidamente en conceptualizaciones que, con estos criterios, nos resultan destacables. Pude analizar lo importante que resulta para la enseñanza de las fracciones que las/os alumnas/os puedan ver qué ocurre gráficamente y con esquemas, y no solo mostrarles números y reglas sin justificación. En el caso de las fracciones equivalentes, resulta fundamental que puedan identificar la relación de partes, manipular y relacionar las piezas fraccionarias, superponer las representaciones gráficas, y siempre –como expresara–descartar los primeros momentos para trabajar con reglas, como aquella por la cual $a/b = c/d \Rightarrow axd = bxc$.

Otro aspecto importante es que los alumnos tengan la oportunidad de explorar y armen sus propias estrategias como, por ejemplo, la de construir argumentos para poder ordenar fracciones. También que sepan por qué utilizamos ciertas reglas, de dónde vienen, como los criterios para comparar decimales o el mecanismo para hallar la expresión decimal de una fracción.

Como conclusión quiero destacar que "los números racionales constituyen un campo numérico de gran importancia, desde el punto de vista matemático" (Gilberto Obando, 2003) y al iniciar una carrera universitaria que tiene matemática, el taller ha permitido reforzar la importancia de disponer comprensivamente de estos conocimientos, de generar estrategias, de poder argumentar, no sólo para el estudio de la disciplina, sino también para otros campos de conocimiento como la física, la química, la biología, entre otros. Y desde el punto de vista de la vida cotidiana, "en nuestra cultura es indudable su importancia ya que los medios de comunicación nos entregan diariamente información que es cuantificada en términos de porcentajes, razones, fracciones, etc. y una buena comprensión de ellos es fundamental para analizarla e interpretarla" (Gilberto Obando 2003).

Referencias bibliográficas

Albornoz Zapata, C., Bernal Rojas, M., Faúndez Ortiz, M., Sepúlveda Vásquez, A., & Torres Albarrán, R. (2014). *Errores y obstáculos más frecuentes que presentan los estudiantes de séptimo año básico en la resolución de problemas que involucran números decimales*. Chillán. Recuperado el 4 de Diciembre de 2021, de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1125/1/Albornoz_Zapata_Catalina.pdf

Astudillo, G., Dieser, P., & Willging, P. (2016). *Memorias REPEM.* Santa Rosa: EdUNLPam. Recuperado el 4 de Diciembre de 2021, de https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2016/08/MemoriasVIREPEM2016_completas.pdf

Gastaminza, M.L. (1970). *Nociones de Álgebra*. Bahía Blanca, Argentina: Cooperadora de la Universidad Nacional del Sur

González del Olmo, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. Recuperado el 4 de Diciembre de 2021, de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1

Mombello, L. (2018). *Una mirada sobre la propia práctica : la reflexividad en la docencia desde las.* Buenos Aires: UNIPE. Recuperado el 4 de Diciembre de 2021, de http://biblioteca.clacso.org/Argentina/unipe/20200422083856/una-mirada.pdf

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, 8(2), 157-182. Recuperado el 4 de Diciembre de 2021, de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Pellicena, L. P. (2016). *Dificultades de aprendizaje de la.* Zaragoza, España. Recuperado el 04 de Diciembre de 2021, de https://core.ac.uk/download/pdf/289983015.pdf

Pochulu, M. D. (2007). Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 68, 4-9.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.