HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS APLICADAS A LA DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN DE COSTOS DE UNA EMPRESA

Marta Elisa PAZ[1]
Fabiana Edit VERALLI[2]

RESUMEN

Costos – Producción - Funciones de varias variables

La función de costos de una empresa, determina el monto de la erogación necesaria para obtener los distintos niveles de producción de un determinado bien.

En este trabajo se analiza el comportamiento de la función de costos de una empresa suponiendo la existencia de dos insumos variables, permitiendo la existencia de otros factores o insumos fijos, bajo la condición "ceteris paribus".

Se modela matemáticamente el problema empleando una función de producción continua de dos variables con derivadas parciales de primero y segundo orden también continuas.

Se utilizan las curvas de nivel asociadas a estas funciones de dos variables para representar los diferentes niveles de producto total y costo total, conforme a las distintas combinaciones de insumo elegidas. Se determinará gráficamente el llamado "sendero de expansión" de la empresa a largo plazo. Combinando en cada uno de estos puntos, el valor de la línea de isocoste con el nivel de la isocuanta tangente, se obtendrán los distintos puntos de la función de costo total de la empresa.

Se emplearán herramientas del cálculo diferencial para funciones de varias variables, donde se constatará analíticamente la condición de equilibrio.

[1] Contador Público Nacional. Magíster en Gestión Empresaria. Docente UNLPam.
martaepaz@hotmail.com.ar

[2] Contador Público Nacional. Magíster en Gestión Empresaria. Docente UNLPam.
fabianae90@yahoo.com

El presente trabajo es una síntesis de la propuesta aúlica sobre un caso práctico presentada en las XXIX Jornadas de Docentes de Matemática en Ciencias Económicas y Afines desarrolladas en Santa Rosa (LP) los días 17, 18 y 19 de setiembre de 2014.

Manteniendo indeterminado el nivel de producción, se obtendrá la función de costos correspondiente.

ABSTRACT

Costs - Production - Functions of several variables

The cost function of a company determines the amount of the expenditure required to obtain different levels of production of a particular good.

In this work, the behavior of the cost function of a company is analyzed assuming the existence of two variable inputs, allowing the existence of other factors or fixed inputs under the "ceteris paribus" condition.

The problem is modeled mathematically using a continuous production function of two variables with partial derivatives of first and second order that are also continuous.

Level curves associated to this two-variables-functions are used in order to represent different levels of the total product and total cost according to the various combinations of the selected input. The called “expansion path” of the company in the long term is computed graphically.

Combining the value of the isocost line with the level of the isoquant tangent in each of these points, the different parts of the total cost function of the company will be obtained.

Tools of differential calculus for functions of several variables are used, where the equilibrium condition will be verified analytically.

Keeping undetermined the level of production, the corresponding cost function will be obtained.

Los costos en la empresa

El costo total en que incurre una empresa para producir un determinado nivel de un producto “x”, puede expresarse en función de las cantidades de factores o insumos utilizados para obtenerlo:

$$C = w_1 \,.\, x_1 + w_2 \,.\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_i \,.\, x_i + \ldots\ldots + w_n \,.\, x_n$$

Donde w_i indica el precio unitario del i-ésimo factor y x_i la cantidad utilizada del mismo.

En competencia perfecta los precios wi son fijos y conocidos, para el resto de los mercados pueden ser una función de la tasa de insumos de x_i.

$$\mathbf{w_i = f\,(x_i)}$$

o expresado en forma general:

$$\mathbf{w_i = f\,(x_1,\, x_2,\, \ldots\ldots x_n)}$$

A estas ecuaciones se las denomina *"ecuaciones de costo"*, puesto que el costo total se expresa como una función de las cantidades de factores empleados por la empresa.

Aunque los responsables de las decisiones de la empresa pueden contar con estas *"ecuaciones de costo"*, existe otra forma de representar los costos que desde el punto de vista de la información deseada por la empresa maximizadora de beneficios es más aclaratoria y utilizada que aquella. Esta alternativa es la denominada en economía *"función de costos"* propiamente dicha, que expresa el costo total como una función de la cantidad de bienes producida.

Si se conocen los precios o las funciones de demanda para cada uno de los bienes producidos por la empresa, y si el costo total se plantea como una función de las cantidades producidas de estos bienes, el beneficio total puede expresarse como una función de la producción solamente.

Esta función de costo total indica el monto de la erogación necesaria para obtener los distintos niveles de producción de un determinado bien. Se trata de una función de "conceptos mínimos", porque cada punto de la misma, indica el menor costo requerido para llevar a cabo los distintos niveles de producción, con un estándar de calidad dado.

En las ciencias económicas se estudia la optimización de esta función, porque se sabe que el empresario desea ser eficiente en el uso de los insumos, lo que le permite obtener la mayor ganancia posible.

Función de COSTO TOTAL

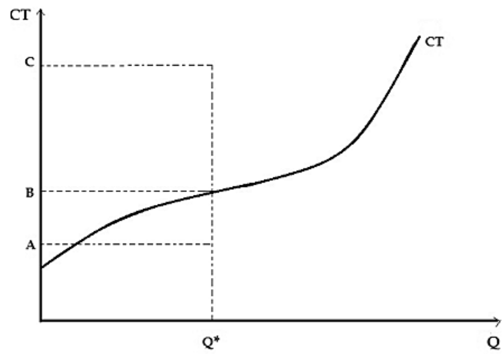


Figura 1

Para producir un nivel igual a **Q***: B representa el menor costo (costo óptimo); valores inferiores a **B**, por ejemplo **A** representan costos insuficientes para alcanzar ese nivel de producto, y valores superiores a **B**, por ejemplo **C**, representan costos excesivos, innecesarios

Los costos y la producción

"La función de producción indica la máxima cantidad de producto que puede obtenerse por período ante las distintas combinaciones de factores" (Paz, M. ,1995: 51).

Es decir que determina la cantidad de bienes y servicios que una empresa puede producir para ofrecer en el mercado. Los procesos de producción requieren de distintos insumos tales como trabajo, capital, materias primas entre otros.

La combinación óptima de los dos insumos variables genera el producto total (PT). Cabe señalar que este producto total se puede lograr con una amplia variedad de diferentes combinaciones de cantidad de los insumos variables; dicho de otra manera, se puede sustituir un insumo por otro en la producción de un cierto volumen de producto.

En particular, analizaremos el proceso de producción que requiere de los insumos variables **trabajo** (x_1) y **capital** (x_2) y en el cual el producto total (PT) resulta ser una función de dos variables continuas y con derivadas parciales primeras y segundas continuas que se representa en el espacio. Lógicamente este producto total tiene asociado un costo. En este trabajo se estudia el comportamiento de la función de costos de una empresa bajo el supuesto de la existencia de dos insumos variables (a efectos de facilitar y graficar el análisis), permitiendo la existencia de otros factores o insumos fijos bajo la condición *"ceteris paribus"*[3] .

Modelo

Se plantea matemáticamente el problema empleando una función de producción continua de dos variables, con derivadas parciales de primero y segundo orden también continuas.

Se tendrá:

Función de Producción: $\mathbf{Q= f\,(x_{1}\,,\,x_{2})}$ (1)

Ecuación de costo: $\mathbf{CT = w_{1}\,.\,x_{1} + w_{2}\,.\,x_{2}}$ (2)

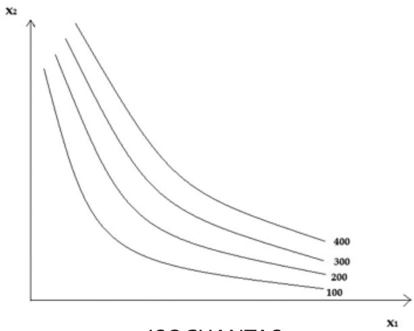
donde w_1 y w_2 son los precios constantes y conocidos de los factores productivos y x_1 y x_2 las cantidades utilizadas de los mismos.

Curvas de Nivel

Se utilizan las curvas de nivel asociadas a estas funciones de dos variables, para representar los diferentes niveles de producto total y costo total conforme a las distintas combinaciones de insumo empleadas. De esta manera, igualando las funciones anteriores a distintos niveles fijos de producción (1) y a distintos montos de costo (2), se obtendrán respectivamente las líneas de **isocuantas** y de **isocostes** de la empresa.

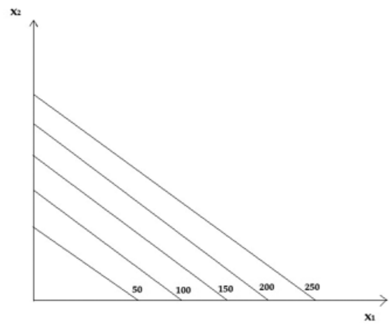
Como su nombre lo indica las isocuantas, son líneas que representan las combinaciones de factores con las que se obtiene el mismo nivel de producción, y las isocostes son líneas que unen las combinaciones de factores que indican el mismo costo total.

[3]"Expresión latina que significa "todo lo demás constante". Ceteris paribus es un supuesto económico desarrollado por Alfred Marshall, el cual implica que en un análisis económico todas las variables que puedan afectar el fenómeno estudiado permanecen constantes. De esta manera, suponiendo que todos estos factores no cambian, es posible analizar por separado la acción de la variable en cuestión sobre el fenómeno estudiado." (Franquet Bernis, J. , 2014: 868)



ISOCUANTAS

Figura 2



ISOCOSTES

Figura 3

A medida que nos alejamos del origen de coordenadas, se emplean mayores cantidades de los factores o insumos variables (x_1 y x_2), por lo tanto se obtendrán mayores niveles de producto, lo que requerirá costos también mayores

Puntos óptimos

Como se expresó anteriormente cada punto de una isocuanta determinada, indica las distintas combinaciones de factores con las que puede obtenerse el mismo nivel de producto. Como cada uno de ellos, está formado por distintas cantidades diferentes de ambos factores y éstos poseen en el mercado precios también diferentes, en cada punto se obtiene igual nivel de producto pero a distinto costo (según la cantidad utilizada de ellos).

Si cada punto de una isocuanta representa un costo diferente, el empresario elegirá aquél de menor costo, es decir aquella combinación de factores que representa el menor costo posible para ese nivel de producto. Esta combinación será aquella en la curva de isocuanta que resulte tangente a la recta de isocoste lo más cercana al origen posible.

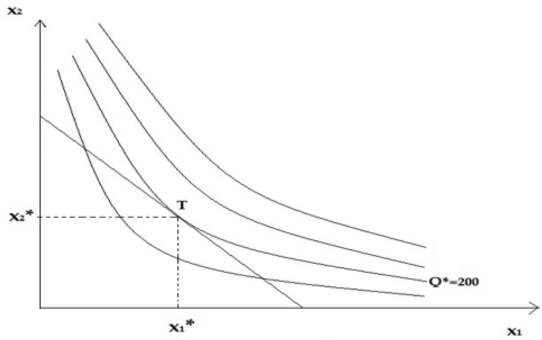


Figura 4

En el gráfico la combinación óptima de factores para producir **Q = 200** unidades, se localizará en el punto "**T**", donde se emplearán las cantidades $\mathbf{x_1*}$ y $\mathbf{x_2*}$ de cada factor.

Superponiendo los dos gráficos se obtendrán los puntos de menor costo para cada nivel de producto.

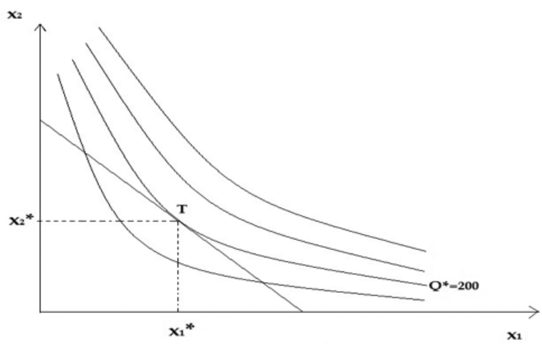


Figura 5

La línea que une a estos puntos, se denomina ***"sendero de expansión"*** de la empresa e indica las distintas combinaciones de factores que representan el menor costo (combinación óptima) para obtener cada nivel de producto. Como se dijo estos puntos se localizarán allí donde cada isocuanta resulte tangente a la línea de isocoste lo más cercana posible al origen.

Sendero de expansión es la isoclina particular a lo largo de la cual aumenta la producción cuando permanecen constantes los precios de los factores. Ella nos indica cómo cambian las proporciones de los factores cuando se altera la producción o el costo mientras que los precios de los factores permanezcan constantes. (Ferguson, C. & Gould. J.,1975: p.175)

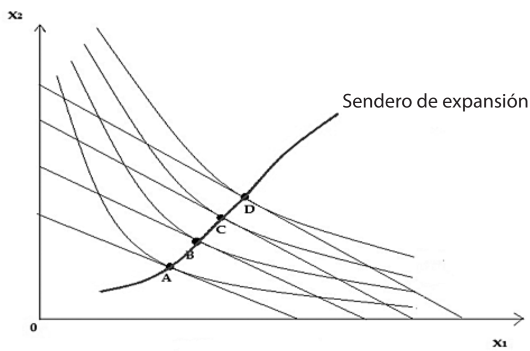


Figura 6

Condición de equilibrio

Cuando nos deslizamos a lo largo de una isocuanta, el nivel del producto permanece constante y la razón de insumos cambia continuamente. Un insumo puede sustituir a otro de manera que se mantenga constante el nivel de producción y este cambio se mide a través del cálculo de una tasa de sustitución de un insumo por otro.

La tasa marginal de sustitución técnica mide el número de unidades en que disminuye un insumo, por unidad de incremento en el otro, para que el nivel de producción permanezca constante.

En cada uno de los puntos óptimos enunciados, la isocuanta y la recta de isocoste tienen, por ser tangentes, la misma pendiente. Se sabe que la pendiente de la isocuanta es igual a la tasa marginal de sustitución entre los factores e igual al cociente entre las productividades marginales de los mismos:

• La pendiente de cada isocuanta indica cómo pueden intercambiarse dos factores sin alterar el nivel de producción y se tiene que:

$$TMgST_{x_1 \, por \, x_2} = -\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\Bigg]_{PT=constante} = -\frac{dx_1}{dx_2}\Bigg]_{dPT=0} .$$

• La tasa marginal de sustitución técnica del insumo x_1 por x_2 es igual a la relación del producto marginal del insumo x_2 al producto marginal del insumo x_1, simbólicamente .

$$TMgST_{x_1 \, por \, x_2} = \frac{\frac{\partial PT}{\partial x_2}}{\frac{\partial PT}{\partial x_1}} .$$

Por su parte la pendiente de la recta de isocoste es igual a la relación entre los precios de los insumos y a la tasa marginal de sustitución entre factores en el punto de tangencia:

$$CT = w_1 . x_1 + w_2 . x_2$$

$x_1 = \frac{CT}{w_2} - \frac{w_2}{w_1} \cdot x_2$ donde $\frac{w_2}{w_1}$ es la pendiente de la recta de isocoste.

Por lo tanto la condición de equilibrio resulta:

$$\frac{Pmgx_2}{Pmgx_1} = \frac{w_2}{w_1} = TMgST_{x_1 \, por \, x_2}$$

Para elevar al máximo la producción con un costo dado o reducir al mínimo el costo de una producción dada, el empresario debe emplear los insumos en cantidades tales que la tasa marginal de sustitución técnica sea igual a la relación de los precios de tales insumos

Función de costo total

Si en cada punto indicado anteriormente como óptimo, se combina el valor de producción de cada isocuanta con el valor del costo correspondiente a la recta de isocoste tangente a la misma, se obtendrán distintos puntos de la función que en economía se denomina como ***función de costo*** de la empresa. En ella, la variable independiente es la cantidad de unidades producidas (nivel de producción) y la dependiente el costo total necesario para hacerlo.

Obtención analítica de la función de costos

Aplicando el método de los Multiplicadores de Lagrange, puede obtenerse analíticamente esta función de costos. El planteo sería el siguiente:

Mínimo $CT = w_1 . x_1 + w_2 . x_2$ sujeto a $PT = f(x_1 , x_2) = Q$

Para un nivel fijo del nivel de producción, la resolución del problema arroja la combinación de factores y el costo total necesarios para alcanzar el mismo al menor costo posible.

Considerado como indeterminado el nivel de producción "Q", se obtiene resolviendo en este planteo las *funciones de demanda de factores* para cada nivel de producto. Luego, mediante un simple reemplazo de las mismas en la función objetivo, quedará determinada la función de costos de la empresa.

$$L = w_1 . x_1 + w_2 . x_2 + \lambda (f(x_1 , x_2) - Q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = L_1 = w_1 + \lambda f'(x_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{w_1}{f'x_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = L_2 = w_2 + \lambda f'(x_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{w_2}{f'x_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = f(x_1 , x_2) - Q = 0$$

$$\boxed{\frac{w_1}{f'x_1} = \frac{w_2}{f'x_2}}$$ Condición de equilibrio

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtendrán los valores de x_1 y x_2 que hacen cero las derivadas primeras de la función de Lagrange. Al dejar indeterminado el nivel de producción, él valor de los factores aparecerán como funciones de la producción y eventual de sus propios precios.

$$X_1 = h_1 (Q , w_1 , w_2)$$

$$X_2 = h_2 (Q , w_1 , w_2)$$

Estas funciones son las denominadas funciones de demanda de factores e indican la cantidad óptima de cada insumo a aplicar para la obtención de cada nivel de producción al menor costo posible.

Reemplazando en la función objetivo a las variables x1 y x2 por sus funciones de demanda se obtendrá la función de costos de la empresa.

$$CT = w_1.\ h_1(Q, w_1, w_2) + w_2.\ h_2(Q, w_1, w_2)$$

$$CT = f(Q, w_1, w_2)$$

Veamos un ejemplo numérico:

$$CT = w_1.x_1 + w_2.\ x_2 \qquad\qquad Q = x_1 \cdot x_2$$

$$L = w_1.\ x_1 + w_2.\ x_2 + \lambda\,(x_1 * x_2 - Q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = L_1 = w_1 + \lambda x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{w_1}{x_2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = L_2 = w_2 + \lambda x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{w_2}{x_1} \qquad (4)$$

Igualando (3) y (4) $\rightarrow\ x_2 = \frac{w_1 \cdot x_1}{w_2}$

Reemplazando en la función de producción $\rightarrow\ Q = x_1 \cdot \frac{w_1 \cdot x_1}{w_2} \ \Leftrightarrow\ x_1 = \sqrt{\frac{Q \cdot w_2}{w_1}}$;

$x_2 = \sqrt{\frac{Q \cdot w_1}{w_2}}$

Por lo tanto $\boxed{x_1 = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}}$ (5) $\boxed{x_2 = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}}$ (6)

Reemplazando en la función de $CT = w_1.\ x_1 + w_2.x_2$ por x_1 y x_2:

$$CT = w_1 \cdot \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} + w_2 \cdot \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{w_1 \cdot w_2} + \sqrt{Q} \cdot \sqrt{w_1 \cdot w_2}$$

$$\boxed{CT = 2 \cdot \sqrt{Q} \cdot \sqrt{w_1 \cdot w_2}} \qquad (7)$$

Cuando en su momento y de acuerdo a sus objetivos la empresa decida el nivel de producción a obtener, bastará con reemplazar la cantidad de producto deseado (Q), y el valor vigente de los insumos en el mercado (wi) por sus valores, para conocer cuánto debe utilizarse de cada factor y cuál será el costo óptimo de producción.

Por ejemplo, si la empresa decide producir 10.000 unidades y los precios de los factores son respectivamente 40 y 10 unidades monetarias, para saber qué cantidad de factor x1 y x2 deben emplearse con el menor costo posible deben reemplazarse esos valores en las ecuaciones (5) y (6).

Q=10.000 ; w1= 10 u.m. ; w2= 40 u.m.

$$x_1 = \sqrt{10000} \cdot \sqrt{\frac{40}{10}} = 200 \text{ unidades} \qquad x_2 = \sqrt{10000} \cdot \sqrt{\frac{10}{40}} = 50 \text{ unidades}$$

CT= 200 . 10 + 50 . 40 = 4.000 u.m. que es el menor costo en que incurrirá la empresa para producir 10.000 unidades de acuerdo a la óptima combinación de factores determinada por la condición de equilibrio anteriormente descripta.

La siguiente tabla muestra distintas combinaciones posibles para producir 10.000 unidades de producto y los distintos costos en que incurriría la empresa si no optimizara sus funciones de producción y de costos.

x1	x2	Producción	CT
500	20	10000	5800
200	50	10000	4000
100	100	10000	5000
50	200	10000	8500
40	250	10000	10400
25	400	10000	16250

Tabla 1

Conclusión

En el trabajo se modelaron matemáticamente funciones de producción teóricas, sobre el supuesto del empleo de dos factores variables y la condición "ceteris paribus", y de costos, con precios constantes, para encontrar la combinación óptima de factores para producir determinados niveles de producto incurriendo en el mínimo costo posible. Se emplearon funciones de dos variables con derivadas parciales de primero y segundo orden también continuas y se asociaron las curvas de nivel respectivas para determinar las isocuantas e isocostes de la empresa.

Se determinaron las funciones económicas que permitirán al empresario decidir, de acuerdo a sus expectativas y condiciones del mercado, el nivel de producción asegurándose de que el costo en que incurrirá para lograrlo sea el mínimo posible.

Bibliografía

- Ferguson, C. & Gould. J. (1975): *Teoría Microeconómica*. México: Fondo de cultura económica.
- Franquet Bernis, J. (2014): *Aplicaciones a la Economía de las Ecuaciones Infinitesimales y recurrentes.* UNED -Tortosa. España
- Paz, M. (1995): *Relaciones Funcionales en la Teoría Económica. Argentina:* UNLPam.