
Levanten LA MANITO

Leandro Nahuel Cerani Orosco

leo.cerani@gmail.com

El encanto de las funciones racionales

Campo de Prácticas, Año 3, Nº 1, diciembre 2023

Sección: Artículos, pp. 108-123

ISSN 2118-8787

El encanto de las funciones racionales

Resumen

Este trabajo se desarrolla en el marco de la residencia de la Práctica Educativa IV del Profesorado en Matemática, específicamente en un curso de quinto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria. Su propósito principal es presentar los fundamentos matemáticos básicos asociados con las funciones racionales, poniendo especial énfasis en aspectos como el dominio, la imagen y las asíntotas. Además, se exploran los desafíos didácticos asociados con la enseñanza "tradicional" de estas funciones, mediante una revisión de revistas y documentos que abordan problemas e inquietudes en la enseñanza y aprendizaje de este tema. El enfoque principal del trabajo se centra en la perspectiva de la UNIPE, que conceptualiza las funciones racionales como el cociente de dos polinomios. Se destaca que esta aproximación modifica los desafíos didácticos comunes asociados con la enseñanza de este tema. La investigación se complementa con la práctica educativa, desarrollada en base a las referencias mencionadas y nos invita a reflexionar sobre la importancia de una práctica educativa que se base en la toma de decisiones informadas para promover mayores accesos a los conocimientos

Palabras clave: funciones racionales – dominio – imagen - asíntota – educación – UNIPE

The charm of rational functions

Abstract

This work is being developed within the framework of the Fourth Educative Practicum's Residency, which belongs to the mathematics' teaching training course of studies. It was specifically carried out in a fifth year from the Oriented Cycle at Secondary School. Its main purpose is to present the basic mathematical fundamentals associated to the rational functions, making special emphasis on aspects such as domain, image, and asymptote. Furthermore, the didactic challenges associated to the 'traditional' teaching of these functions are explored through a revision of magazines and documents which deal with problems and interests regarding the teaching and learning aspects of this topic. The focus of this work is centered on the UNIPE's perspective, which conceptualizes the rational functions as the quotient of two polynomials. It is highlighted that this approximation modifies the didactic challenges commonly associated with this topic's teaching. The research is supplemented with the practicum, which was developed based on the references previously mentioned, and which invites us to reflect on the importance of a practicum which is based on the knowledgeable decision making to promote a bigger access to knowledge.

Keywords: rational functions – domain – image – asymptote – education - UNIPE

Fundamentos matemáticos

Las funciones racionales se analizan desde distintas perspectivas de diversos autores. Los libros de (Redlin et al., 2012), (Stewart, 2012) presentan la función racional a partir de la división de polinomios.

Definición 6.6.1 Función racional

Una **función racional** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

en donde P y Q son funciones polinomiales.

En general, estas definiciones coinciden en casi todos los libros. No obstante, también se puede encontrar una condición adicional dónde requiere que P y Q sean polinomios sin factores en común, como es en el caso de (Stewart, 2012). Particularmente, vamos a trabajar de funciones homográficas, que son un tipo de funciones racionales en la que el numerador y el denominador son polinomios de primer grado. Su expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

También, Itzcovich & Novembre (2006) dice que una función homográfica es una función racional $f(x)$ que puede obtenerse mediante un desplazamiento $h(x) = \frac{1}{x}$. Se denomina función homográfica. Adentrándonos en las partes de la función, ya conocemos que el dominio de una expresión algebraica se compone de todos los números reales que pueden representar a las variables. El dominio está formado por los números reales que, al ser sustituidos por las variables, no invalidan la expresión; es decir, aquellos valores que no hacen que los denominadores sean igualados a cero y que aseguran la existencia de las raíces. (Swokowski & Cole, 2011, p. 265). También, las definiciones de asíntotas tomadas de Swokowski & Cole (2007) son:

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to \infty \qquad \text{o} \qquad f(x) \to -\infty$$

cuando x se aproxima a a ya sea de la izquierda o la derecha.

La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to c \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty.$$

Fundamentación didáctica

Nuestra residencia va a seguir los lineamientos planteados del trabajo *Función homográfica: Una propuesta didáctica con el aporte del software GeoGebra* de la Universidad Nacional de General Sarmiento (2016) coordinado por Rodolfo Murúa y María Paula Trillini. En este trabajo se puede ver cómo siguieron con la línea de pensamiento planteada por la UNIPE al trabajar las funciones polinómicas como el producto de funciones de menor grado.

Murua nos describe que

> La secuencia fue pensada con la intención de que los alumnos sean productores de conocimiento y los verdaderos protagonistas de nuestras clases, al darles la oportunidad de explorar, realizar conjeturas y luego validarlas. Estas características las consideramos fundamentales desde nuestro enfoque de enseñanza. La Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1970) nos brinda un marco teórico en el cual nos apoyamos, que nos permite acompañar a los alumnos y orientarlos en su proceso de aprendizaje. Creemos que el software GG, en este sentido, permite que esta práctica se enriquezca y sea posible. (p. 10)

También proponen que no necesitan seguir un orden estricto del material, ya que como ellos son los protagonistas en la actividad matemática, pueden saltear las partes que crean necesarias. Como por ejemplo la parte de función de proporcionalidad inversa y dirigirse a otra sí consideran que no necesitan repasarla.

Papini, Bruni y Sanabria proponen que

> Nos proponemos una dinámica de trabajo que pretende ubicar a los estudiantes en una posición de acción. Pensamos las clases con tiempos dedicados a que resuelvan los ejercicios y problemas para que las dudas o preguntas surjan mayoritariamente de ellos mismos. Estos espacios pretenden "devolver" al alumno (en el sentido de Brousseau, 2007, 2015) la responsabilidad de enfrentar los problemas, de poner en juego sus conocimientos, de organizar esos conocimientos y transformarlos, de establecer relaciones nuevas y validarlas, como así también de identificar y de buscar lo que no saben. El rol de los docentes en estos espacios es el de proponer problemas para que los alumnos produzcan y acompañar la búsqueda con respuestas oportunas a las preguntas que surgen. (p. 2)

En el proceso de estudio y aprendizaje de las funciones, los estudiantes deben reconocer y comprender estas funciones en diferentes registros semióticos de representación, tanto gráficamente como algebraicamente. Esta habilidad les permite adquirir y desarrollar capacidades que les permiten interpretar el objeto matemático presente en cada registro y determinar sus características o unidades significativas.

Una vez que los estudiantes han completado esta etapa, se les motiva a participar en la actividad cognitiva de conversión. Esta actividad les permite transformar la información de un registro a otro, incluso cuando los registros son de naturaleza diferente. Es importante destacar que esta conversión no debe ser simplemente un procedimiento manipulativo sin reflexión. A menudo, en las tareas de representar una expresión algebraica gráficamente, los estudiantes siguen una receta preestablecida, generando tablas y luego elaborando un bosquejo de la representación gráfica. Sin embargo, es esencial que los estudiantes sean conscientes de los procesos cognitivos involucrados en esta actividad y no simplemente sigan un conjunto de pasos sin comprender el razonamiento detrás de ellos. (Noreña Gallego, 2013, p. 53)

Fundamentos curriculares.

De los materiales curriculares de la Provincia de La Pampa se recupera lo vinculado al contenido de Función Racional del eje "*En relación con funciones y el álgebra*" de quinto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, cuyo contenido es el que se desarrollará en el aula.

- Modelizar situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones polinómicas, racionales y exponenciales:
  - Usando las nociones de dependencia y variabilidad,
  - Seleccionando la representación (tablas, fórmulas, gráficos con recursos tecnológicos) adecuada a la situación,
  - Interpretando el dominio, el codominio, las variables, los parámetros y los puntos estratégicos en el contexto de las situaciones que modelizan.
- Analizar el comportamiento de las funciones racionales:
  - Interpretando sus fórmulas para anticipar las características de sus gráficos cartesianos

- Vinculando sus gráficos con los de la función de proporcionalidad inversa, acudiendo a recursos tecnológicos para construirlos, y validar en forma analítica.

- Modelizar situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante ecuaciones, interpretando las soluciones en el contexto de la situación.

Momentos en la propuesta de enseñanza desarrollada en aulas de 5to año del ciclo Orientado de la Educación secundaria

En este documento, presento algunos de los momentos más importantes de la práctica educativa vinculada a las funciones racionales. Para afianzar los conceptos y la utilización de GeoGebra, se llevaron a cabo otras actividades complementarias que, por razones de espacio, no se incluyen aquí.

Primer momento: Construyendo la definición de función racional y un breve análisis de su gráfica

Actividad:

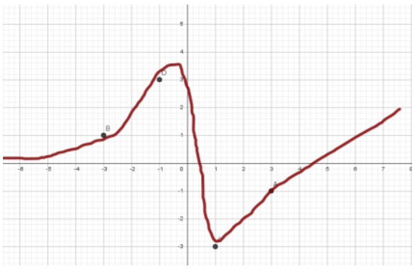
Niyo tiene una maquinita que, al ingresar cualquier número, devuelve otro que al multiplicarlo con el número ingresado da como resultado -3. Elaborar una tabla con algunos números que puede arrojar la maquinita.

A	B	$A \cdot B$
-3	1	-3

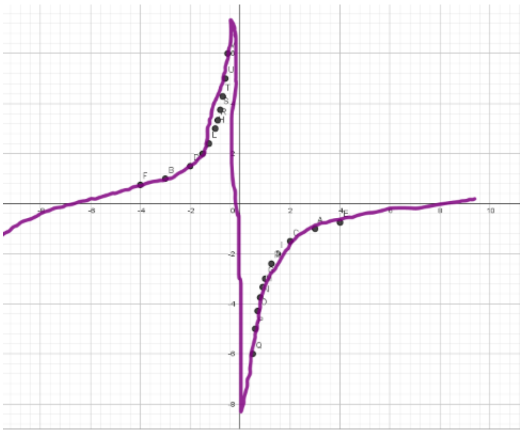
a) ¿Qué valores devuelve la maquinita con valores grandes? ¿y con valores muy chicos?
b) ¿Qué sucede alrededor de 0?
c) Explore en GeoGebra el comportamiento de la función.

Para realizar esta actividad primero calculamos en el pizarrón pares de números que cumplan con la propiedad de la tercera columna. Los puntos más fáciles y casi inmediatos fueron (-3,1)

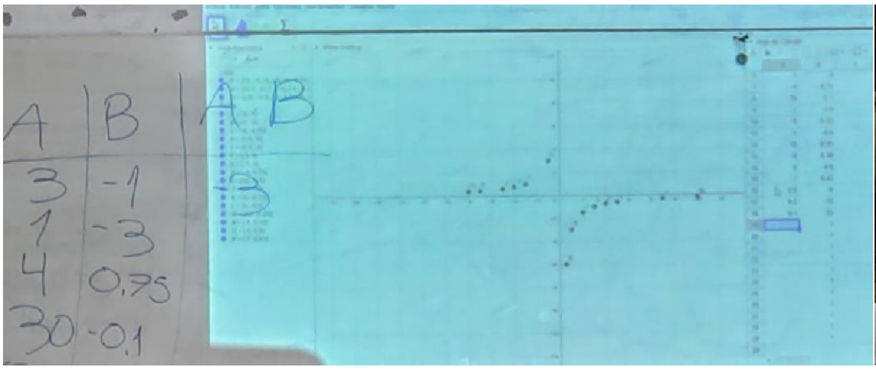
(3,-1) (1,-3) (-1,3). Con ayuda de la maquinita previamente hecha en una hoja de cálculo de GeoGebra, creamos los esos puntos asignándole a la coordenada x los puntos de la columna A, y en y los puntos de la columna B, luego, se invitó a un estudiante a plantear algún grafico aproximado. La respuesta fue la siguiente:

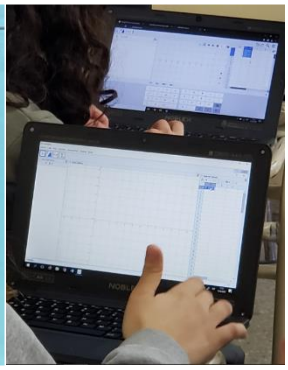


Agregando cada vez más puntos, podemos ver como la función va tomando cada vez más forma

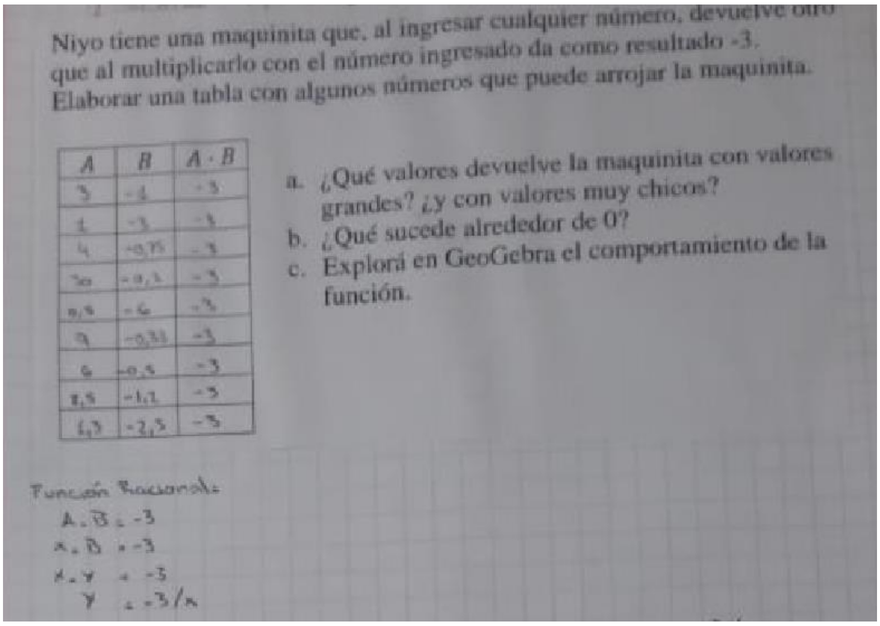


Durante la clase, se fue proyectando GeoGebra en el pizarrón para ir realizando los gráficos aproximados e ir buscando puntos con la maquinita





Resolución de un estudiante:



Niyo tiene una maquinita que, al ingresar cualquier número, devuelve otro que al multiplicarlo con el número ingresado da como resultado -3.
Elaborar una tabla con algunos números que puede arrojar la maquinita.

A	B	$A \cdot B$
3	-1	-3
1	-3	-3
4	-0,75	-3
30	-0,1	-3
0,5	-6	-3
9	-0,33	-3
6	-0,5	-3
2,5	-1,2	-3
1,3	-2,3	-3

a. ¿Qué valores devuelve la maquinita con valores grandes? ¿y con valores muy chicos?
b. ¿Qué sucede alrededor de 0?
c. Explorá en GeoGebra el comportamiento de la función.

Función Racional:
A . B = -3
x . B = -3
x . y = -3
y = -3/x

A partir del gráfico aproximado, ahora es dónde van a empezar las preguntas del tipo "¿Y sí nos seguimos acercando al 0, que va a suceder?". Al aproximarnos a cero, por ejemplo, con los puntos entre 1 y 0.5, la gráfica de la función se va acercando a la forma de una cruz. Esto nos lleva a preguntarnos si es posible que la función tenga dos trazos, en lugar de uno solo. Ingresamos números cada vez más cercanos a 0 para analizar que nos devuelve la maquinita.

0.1	-30	-3
0.01	-300	-3
0.001	-3000	-3
-0.1	30	-3
-0.01	300	-3
-0.001	3000	-3

Podremos concluir que a medida que el número ingresado se acerca a 0 por derecha, la función tiende a $-\infty$ y a medida que se acerca a 0 por izquierda la función tiende a ∞ por ende tenemos un punto de discontinuidad.

Para entender mejor el concepto de continuidad se hizo la comparación entre cómo se dibuja un polinomio, que se puede hacer en su totalidad sin levantar el lápiz y en estas funciones es imposible.

Con esta primera actividad fuimos elaborando algunas hipótesis sobre lo que fuimos construyendo. Cuando se buscó la fórmula de la maquinita vimos que esa función esta expresada como un cociente y su gráfica está en dos trazos/ramas discontinuas. También, con el ultimo análisis vimos que el denominador jamás puede ser 0 y que dependiendo por cual lado nos acercábamos a ese punto la función tendía a infinito (∞) o a menos infinito ($-\infty$)

Actividad:

Ailin y Niyo quieren comprar entradas de una fiesta para sus compañeros de la facultad y son los encargados de reunir el dinero. Ailin habló con un promotor para preguntarle cuánto les cobraba y si les hacía precio. Él cobra \$10 por entrada, pero por ser conocida, le descuenta \$15 del total. Como Niyo y Ailin están organizando la salida, todos los compañeros menos ellos dos ponen su parte.

a) Suponiendo que en el curso hay 24 estudiantes ¿Cuánto debe pagar cada uno por su entrada?

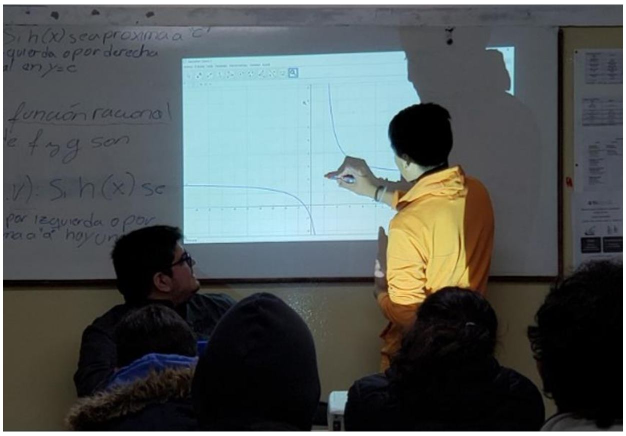
b) ¿Y sí invitan al curso de al lado que son 28 estudiantes más?

c) ¿Cuántos estudiantes deberíamos invitar para que cada uno pague \$11? ¿Y para que paguen \$10?

d) Encontrar un método que permita calcular cuánto debe pagar cada uno, ante la posibilidad de que cuando vayan a comprar haya diferentes cantidades de alumnos.

e) Explorar la función con GeoGebra y elaborar conclusiones sobre los valores que puede tomar la función.

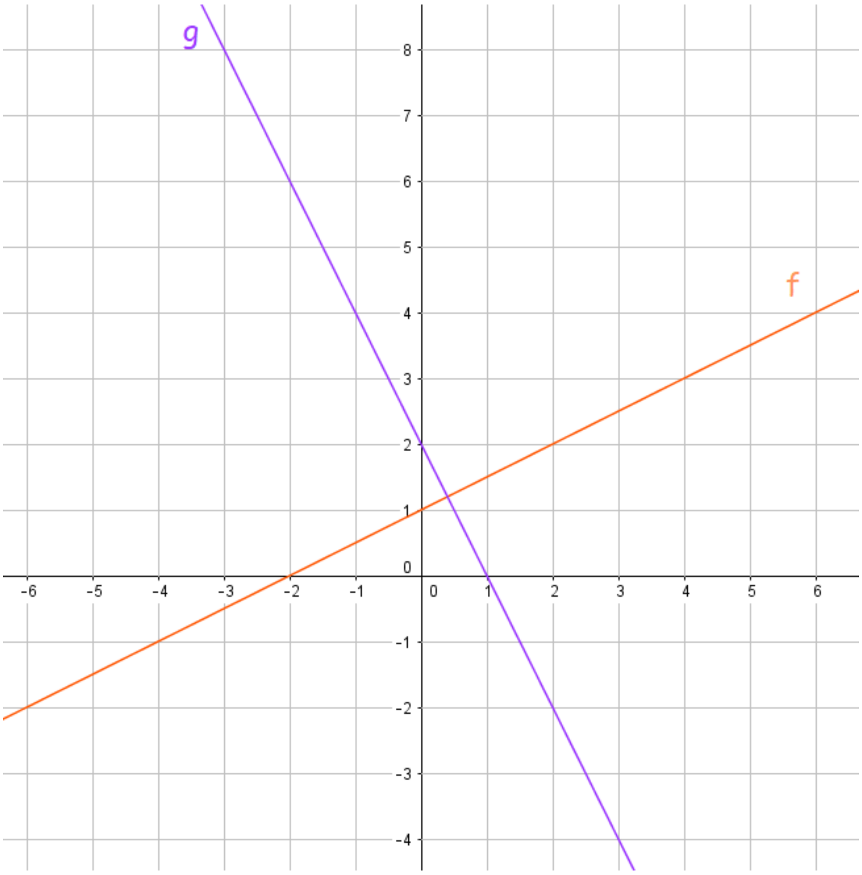
Como venimos de trabajar con un problema de proporcionalidad inversa, ya tenemos una noción de los conceptos necesarios para resolver. Esta actividad sirve para profundizar un poco las ideas que formamos en la primera actividad y darle una estructura más formal.



Segundo momento: Analizando funciones con los criterios de la UNIPE

Actividad:

Sean f y g las funciones lineales dadas por los siguientes gráficos, consideramos la función h, cuya expresión es $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$



1) Analizando los gráficos de f y g, calcular el valor de $h(x)$:

$h(0) =$

$h(-2) =$

$h(-4) =$

$h(1) =$

$h(2) =$

2) Analizando los gráficos de f y g, decidí, sí es posible, el signo (positivo, negativo, o cero)

$h(-5)$

$h(5)$

$h(10)$

$h(1)$

$h(-2)$

$h(-1)$

$h(156)$

3) Elegí entre los siguientes gráficos cuál o cuáles podrían corresponder a la función h. Explica el motivo de la elección y por qué fueron descartados los restantes.

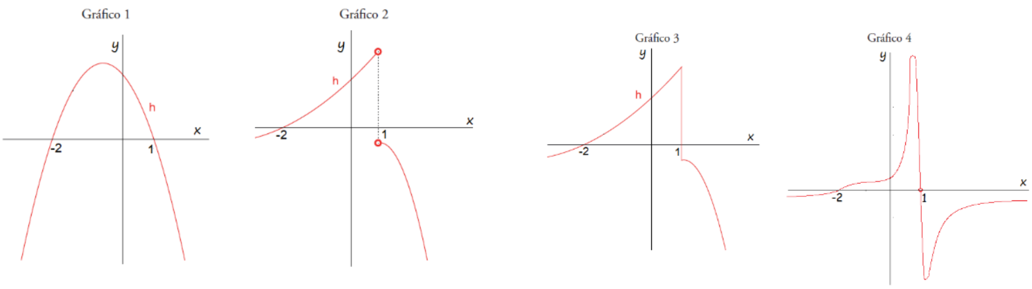


Gráfico 5

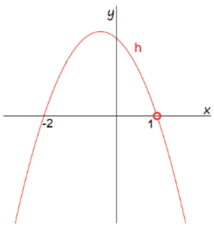


Gráfico 6

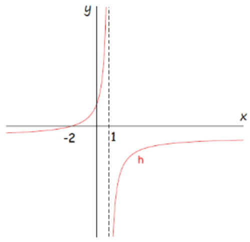


Gráfico 7

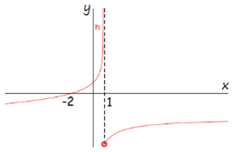
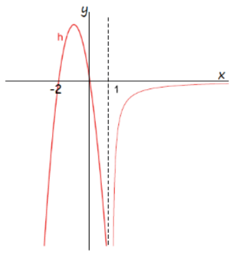


Gráfico 8



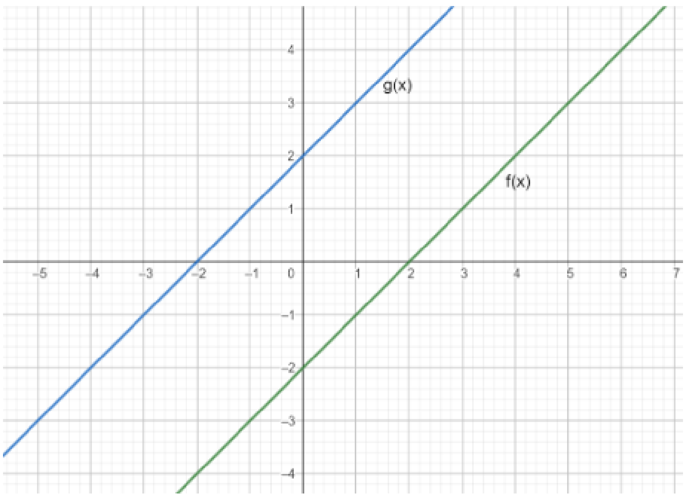
Este ejercicio sigue la metodología de la UNIPE. Al igual que en el caso de los polinomios, que se analizaron como producto de polinomios de menor grado, las funciones racionales se estudiarán como cociente de otras funciones. En particular, nos centraremos en las funciones homográficas, que son el cociente de dos funciones lineales.

Esta metodología tiene sus ventajas. Puesto que gráficamente podemos identificar varias cosas de manera ágil como, por ejemplo, si tenemos que $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$:

- La raíz o raíces del numerador se heredan a la función racional
- La raíz o raíces del denominador se convierten en asíntotas verticales

La identificación de la función numerador y la función denominador de una función racional permite identificar fácilmente la raíz de la función y la asíntota vertical. Además, esta información proporciona una idea aproximada de la gráfica de la función antes de realizar los cálculos necesarios.

Otro ejercicio, muy similar a este, fue analizar la siguiente gráfica:



Donde se preguntó

1) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?
2) ¿Cuáles son las asíntotas?
3) Determina los conjuntos de positividad y negatividad de la función

Luego seguimos analizando las funciones, pero de una forma más “tradicional”

Actividad:

Analizar las siguientes funciones y escribir el dominio, imagen, raíces, asíntotas y gráfico.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{16-x}$

b) $p(x) = \frac{19x-96}{3x-7}$

c) $g(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$

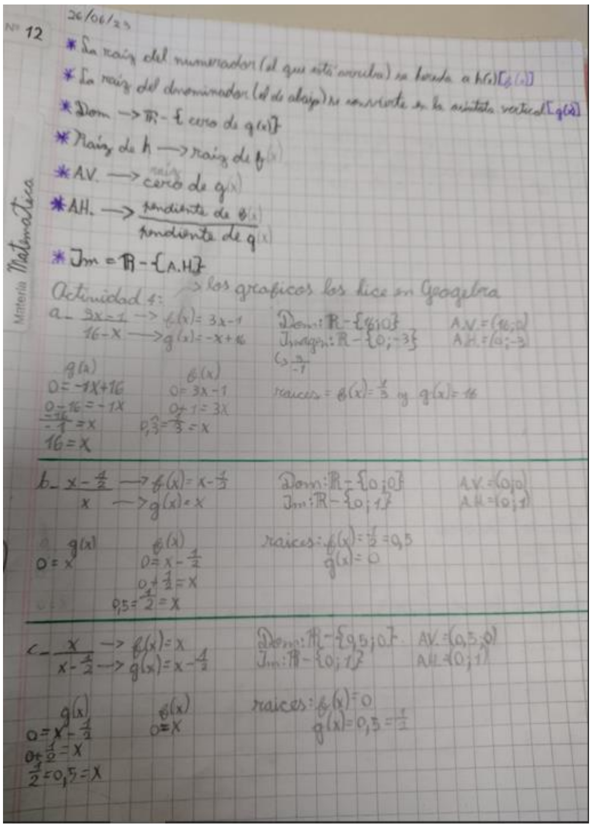
d) $q(x) = \frac{5x+9}{3x+6}$

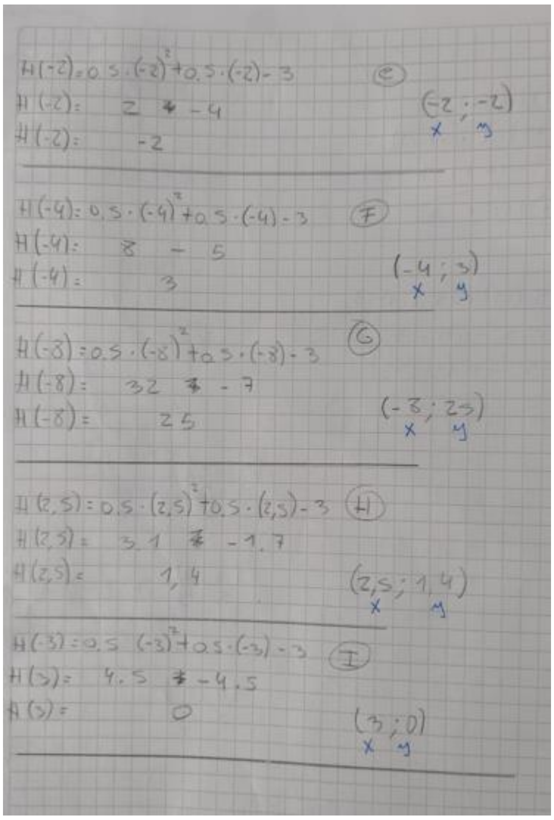
e) $h(x) = \frac{x}{x-\frac{1}{2}}$

f) $r(x) = \frac{4x+2}{x-1}$

Esta actividad permitió encontrar el razonamiento de cálculo para hallar las partes de la función racional. La actividad previa fue útil para familiarizarse con algunas de sus componentes, como el punto de discontinuidad del dominio y el punto donde cruza la asíntota vertical. Esta actividad llevó ese reconocimiento a un nivel más analítico, profundo y mucho más tradicional ya que, si bien analizar funciones racionales observando las funciones lineales que están detrás nos otorga algunas facilidades, también analizar la fórmula de una función racional proporciona información valiosa sobre su comportamiento, dominio y asíntotas que son fundamentales para comprender y trabajar con la función.

Algunas resoluciones de los y las estudiantes



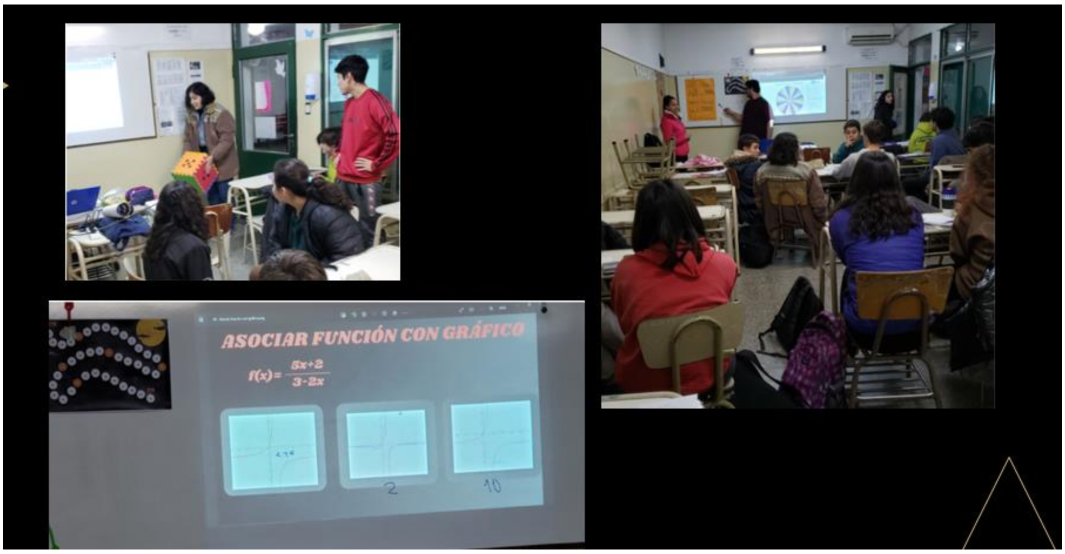


Posteriormente, habiendo estudiado de forma gráfica y analítica las funciones, proponemos interiorizar los conceptos y definiciones mediante un juego.

Tercer momento: ¡A jugar!

Actividad

El juego se diseñó para repasar los conceptos trabajados en las clases anteriores, preparándonos para un trabajo práctico evaluativo posterior. Consistía en elegir una tarjeta de manera al azar mediante una ruleta, donde las preguntas eran muy variadas. Por ejemplo, usamos tarjetas para completar definiciones, verdadero o falso, y preguntas tipo múltiple choice relacionadas al dominio, asíntotas e intervalos de positividad y negatividad. Para facilitar el cálculo de algunas tarjetas, como las de dominio, imagen y asíntotas, se hizo una cartulina con información sobre como calcular las partes de la función racional. Se incentivó constantemente a los estudiantes a tener sus carpetas a mano, ya que algunas preguntas fueron textuales a las que habíamos llegado en clase. Esto sirvió como incentivo para quienes mantuvieron sus carpetas al día, aunque en este curso no tuvimos problemas en ese aspecto.



Reflexiones finales

Es importante destacar la relevancia de las funciones racionales en el ámbito de las matemáticas y su aplicación en diversas áreas del conocimiento. Por lo tanto, su enseñanza es fundamental para el desarrollo de habilidades y competencias en los estudiantes. Sin embargo, la enseñanza de las funciones racionales presenta desafíos didácticos importantes, que requieren de una reflexión profunda sobre los enfoques y estrategias pedagógicas más adecuadas para su abordaje. La enseñanza tradicional de las funciones racionales suele ser más pasiva y centrada en la transmisión de conocimientos por parte del profesor el cual es el principal protagonista de la clase, y los estudiantes tienen un papel más limitado en el proceso de aprendizaje. La UNIPE propone un enfoque innovador y dinámico para la enseñanza de las funciones racionales, que busca involucrar activamente a los estudiantes en su proceso de aprendizaje y promover su cooperación en la resolución de problemas, busca empoderar a los estudiantes y fomentar su participación activa en el proceso de aprendizaje, lo que puede tener un impacto significativo en su motivación y en su capacidad para comprender y aplicar los conceptos matemáticos. También es importante la utilización de recursos didácticos adecuados para todos los estudiantes, y la adaptación de estos a sus necesidades y características, con el fin de lograr una enseñanza efectiva y significativa. La comprensión del concepto y su construcción es clave para el aprendizaje de las matemáticas, ya que permite a los estudiantes comprenderlos mejor y construir bases sólidas para el aprendizaje de forma significativa. Además, es importante que los estudiantes vean el significado de las ideas matemáticas y puedan aplicarlas en situaciones reales, lo que les ayuda a comprender la relevancia de las matemáticas y a motivarse para seguir aprendiendo.

Bibliografía

- Comparatore, C. R. (2015). *Matemática 2 funciones 2* (1a ed.). Longseller.
- Itzcovich, H., & Novembre, A. (2006). *Matemática M2*. Tinta Fresca.
- Noreña Gallego, R. A. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional* (1a ed.). Universidad del Valle.
- Murúa, R., & Trillini, M. P. (2016). *Función homográfica: una propuesta didáctica con el aporte del software GeoGebra* (1a ed.). Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Papini, M. C., Bruni, C., & María Daniela Sanabria. (2016, Agosto). Un recurso multimedial para abordar algunos aspectos de la función racional. *VI REPEM*.
- Stewart, J. (2012). *Precalculus: Mathematics for Calculus* (L. Redlin & S. Watson, Compilers). Cengage Learning.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2007). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (12a ed.). Cengage Learning.
- Wikipedia. (2023). *Función racional*. Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_racional
- Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (M. d. P. Carril Villarreal, Trans.). McGraw-Hill Interamericana.