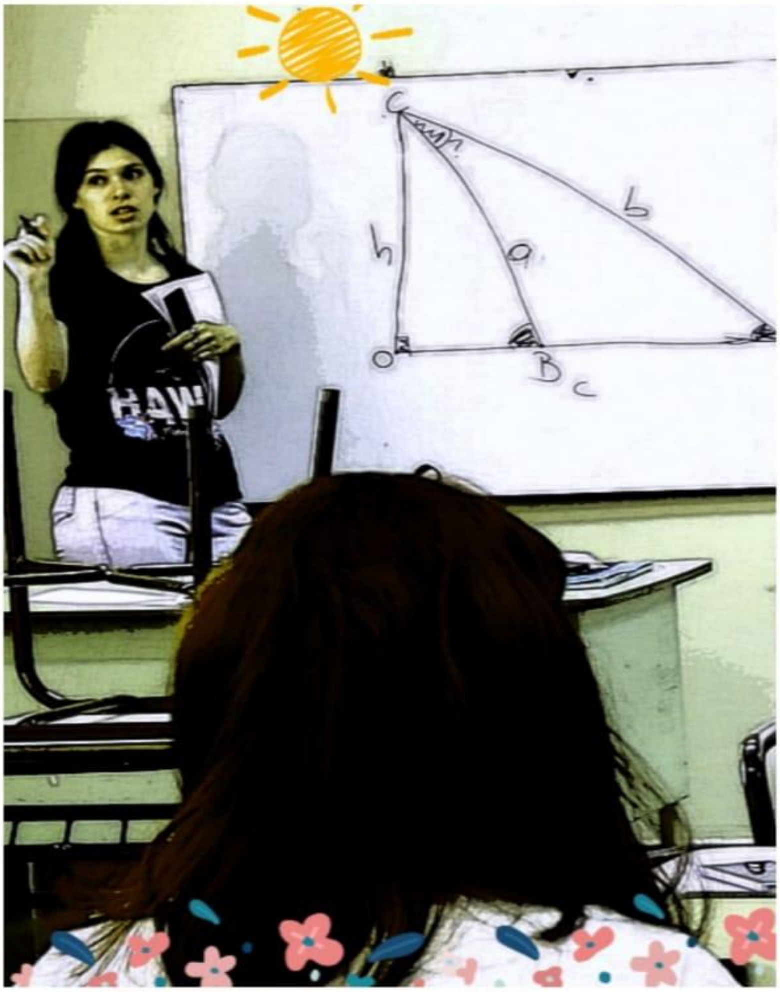
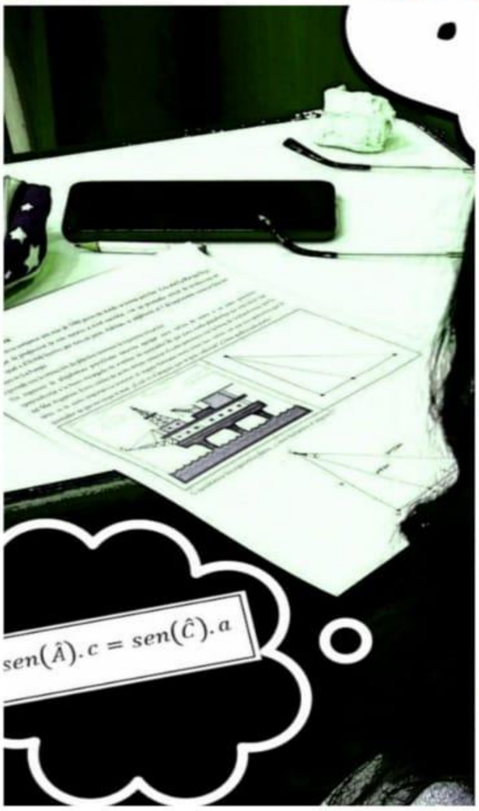

C
h
a
b
B
c


$sen(\hat{A}).c = sen(\hat{C}).a$


$\frac{sen(67°)}{177m} = \frac{sen(55°)}{c}$
$c = \frac{sen(55°).177m}{sen(67°)}$
$\frac{sen(48°)}{9,8m}$
$0,36 = sen$

Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Alina Salinas
alina.d.salinas@hotmail.com

Distancias mundiales
Campo de Prácticas, Año 2, Nº 1, octubre 2022
Sección: Artículos, pp. 165-183
ISSN 2118-8787.

Distancias mundiales

Resumen
El trabajo extiende la experiencia de la residencia con estudiantes de sexto año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria en un colegio de la Ciudad de Santa Rosa, La Pampa, práctica desarrollada en el marco de formación del Profesorado de Matemática. En la primera parte de esta propuesta se presentan los fundamentos matemáticos sobre las identidades trigonométricas fundamentales y las leyes del seno y del coseno. Una segunda parte de la propuesta la constituyen los fundamentos didácticos, indagados en revistas y documentos publicados sobre problemas e inquietudes de la enseñanza y de los aprendizajes, sobre la resolución de situaciones problemáticas que pueden ser modeladas por algún tipo de triángulo. Un par de momentos del desarrollo de la práctica educativa complementan el documento y nos permiten reflexionar sobre las decisiones que se tomaron a partir del recorrido bibliográfico y de investigación.

Palabras clave: trigonometría, leyes del seno y del coseno, obtención de medidas de distancias y ángulos sin medir

World distances

Abstract

This work extends the experience of the residency with students of the sixth year of the Secondary Education Oriented Cycle in a school in the city of Santa Rosa, La Pampa, a practice developed within the framework of the Mathematics Teacher Training Program. The first part of this proposal presents the mathematical foundations of the fundamental trigonometric identities and the laws of sine and cosine. A second part of the proposal is constituted by the didactic foundations, investigated in magazines and documents published on problems and concerns of teaching and learning, on the resolution of problematic situations that can be modeled by some type of triangle. A couple of moments of the development of the educational practice complement the document and allow us to reflect on the decisions taken from the bibliographic and research journey.

Keywords: trigonometry, laws of sine and cosine, obtaining measurements of distances and angles without measuring

Poder con las grandes distancias

El objetivo de este estudio es buscar y analizar recursos y fundamentos que contribuyan al desarrollo de nuevas alternativas y estrategias didácticas para trabajar algunos conceptos de trigonometría en espacios de la educación secundaria obligatoria.

La trigonometría posee numerosos usos y aplicaciones, por ejemplo, nos ayuda al cálculo de distancias inaccesibles, sin necesidad de recorrerlas, nos brinda herramientas para realizar cálculos de ángulos, alturas y longitudes que serían muy complejas de medir en la realidad. La trigonometría es una herramienta importante en técnicas de arquitectura en la construcción de casas, edificios, puentes de grandes tamaños, acompañando los cálculos de las condiciones de resistencia; también se usa en astronomía para la medición de estrellas próximas, en sistemas de navegación por satélites y para la medición de distancias entre puntos geográficos muy distantes. Una aplicación interesante se encuentra en los juegos de mesa, como el billar, ya que el choque de las bolas entre sí hace que cada una tome direcciones diferentes generando ángulos específicos que permiten armar estrategias a cada jugador/a y tener elementos para determinar cuál será su siguiente movimiento. Todas esas posibilidades permiten alimentar desafíos educativos que destaquen la importancia de la enseñanza de la trigonometría, y se transforma en el propio desafío.

Fundamentos Matemáticos

Analizamos como definen y explican distintas/os autoras/es las identidades fundamentales, las ecuaciones trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno, priorizando para esta monografía las que tienen una importancia especial dentro de los saberes oficiales del sistema educativo de nuestros contextos nacionales.

Antes de presentar las identidades fundamentales ayuda conocer cómo cada autor seleccionado define qué es una identidad trigonométrica:

"Una ***identidad trigonométrica*** es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad." (Dennis G. Zill y Jacqueline M. Dewar, 2012, p. 414)	"Utilizamos aquí la palabra *"**identidad**"* para significar que el enunciado se cumple para todos los valores de las variables para las cuales está definida." (Patrick J. Boyle, 1990 ,p.81)	"***Identidad trigonométrica*** es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo que se cumple para cualquier valor que se le asigne al ángulo."(Jiménez, René, 2010, p.147)	"***Identidades trigonométricas***: son igualdades que se cumplen para cualesquiera valores del ángulo que aparece en la igualdad." (Dr. J. A. Baldor, 2004, p.337)

Los cuatro autores seleccionados concuerdan en que una identidad trigonométrica debe ser válida para todos los valores de ángulos, números o variables con las que se trabaje, reforzando el sentido de la noción de identidad algebraica en general.
Por otro lado, Denis G. Zill y Jacqueline M. Dewar (2012), Baldor (2004) y Jiménez (2010) coinciden en que toda identidad trigonométrica tiene que tener una igualdad de por medio; se podría decir suponer que implícitamente estos tres autores hablan de ecuaciones ya que estas son igualdades entre expresiones algebraicas; mientras que Patrick J. Boyle (1990) hace referencia a simplificar enunciados lo que da a entender que no necesariamente se debe cumplir una igualdad entre expresiones.
Siguiendo con el hilo, ahora veamos qué considera cada una/o de estos autores cuando se hace referencia a las identidades fundamentales:

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Hay muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se denominan **identidades fundamentales**, y vale la pena memorizarlas. Las siguientes identidades se derivan fácilmente de las definiciones de las funciones trigonométricas.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

(Zill y Dewar, 2012, p. 282)

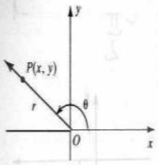


FIGURA 59

IDENTIDADES PITAGORICAS

Las identidades recíprocas y de cociente para los ángulos agudos que dimos en la sección 6.2 también se utilizan para los ángulos generales. (Véase problema 66). A nuestra colección de identidades fundamentales agregamos tres identidades muy útiles denominadas **identidades pitagóricas**. Para obtener la primera de éstas, sea θ cualquier ángulo en posición normal. Como lo muestra la figura 59, sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto del origen en el lado terminal de θ. Sea $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si dividimos ambos lados por r^2 podemos escribir

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Reconociendo que $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \operatorname{sen}\theta$, obtenemos la identidad pitagórica básica:

$$(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 \qquad (5)$$

Es normal escribir $\cos^2\theta$, en lugar de $(\cos\theta)^2$, y $\operatorname{sen}^2\theta$, en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$. Una notación similar se utiliza para las otras funciones trigonométricas y para todas las potencias *excepto* -1. (Como lo reafirmamos en la sección 6.2, $\operatorname{sen}^{-1}\theta$, $\cos^{-1}\theta$, y así sucesivamente, se refieren a la función inversa de la correspondiente función trigonométrica, la cual analizaremos en el capítulo 7).

Con esta nueva notación, (5) se vuelve:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \qquad (6)$$

$x^2+y^2=r$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos\alpha$

(Zill y Dewar, 2012, p. 302)

Si dividimos ambos lados de esta ecuación por $\cos^2\theta$ obtenemos,

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

o

$$1 + \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Como $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ y $\sec\theta = 1/\cos\theta$, esto se simplifica a:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

La última identidad pitagórica es:

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Se obtiene al dividir ambos lados de (6) por $\operatorname{sen}^2\theta$. (Véase problema 67).

(Zill y Dewar, 2012, p. 302)

2.3 IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Existen muchas relaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas. Todas se deducen directamente de las definiciones. Son útiles para efectuar ciertos cálculos, pero principalmente proporcionan la flexibilidad necesaria para manejar expresiones trigonométricas complicadas. Tales expresiones con frecuencia pueden simplificarse considerablemente empleando dichas identidades fundamentales. Este proceso será muy útil en estudios superiores de matemáticas, en especial, en Cálculo Diferencial e Integral.

(Boyle, 1990, p.80)

IDENTIDADES DE FUNCIONES RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

(Boyle, 1990, p.81)

IDENTIDADES DE RAZONES DE FUNCIONES

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(Boyle, 1990, p.81)

Identidades del teorema de Pitágoras

Recuérdese que al definir las funciones trigonométricas en términos de x, y y r, se obtuvo $x^2 + y^2 = r^2$. Con base en esto, obsérvese lo que sucede cuando dividimos dicha igualdad entre r^2.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

(Boyle, 1990, p.83)

En forma semejante, dividiendo entre x^2 y y^2, respectivamente, se obtiene

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

y por tanto,

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

expresiones que reciben el nombre de **identidades del teorema de Pitágoras** (o bien, identidades pitagóricas o del triángulo rectángulo).

IDENTIDADES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

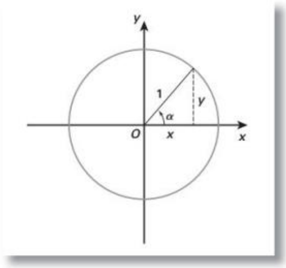
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

(Boyle, 1990, p.84)

A raíz de las definiciones dadas por Zill y Dewar (2012) y Boyle (1990), sobre las identidades fundamentales podemos advertir que llegan a dicha definición a partir de las funciones trigonométricas. Además, dentro de estas identidades, en ambos libros, se mencionan las identidades pitagóricas, las recíprocas y las identidades de razones o cocientes. Pero cabe una diferencia que para la demostración de la primera de las identidades pitagóricas ($sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$) se usa la fórmula de la circunferencia de radio r, lo que podría ser interesante para desarrollar dentro del aula junto con los estudiantes pues solo se usa el Teorema de Pitágoras y las identidades del seno y coseno. Pero para hallar las otras dos: $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$ y $\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$, Zill y Dewar dividen la expresión $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ por $\cos^2(\theta)$ y por $sen^2(\theta)$; mientras que Patrick J. Boyle primero divide a la circunferencia de radio r por $x^2\, e\, y^2$ y luego se reemplaza por el valor correspondiente de seno y coseno.

1. $\operatorname{sen}\alpha \csc\alpha = 1$ **2.** $\cos\alpha \sec\alpha = 1$ **3.** $\tan\alpha \cot\alpha = 1$

Además de las identidades anteriores, vamos a obtener las fórmulas más usadas del círculo unitario ilustrado a continuación.



(Jiménez, 2010, p.147)

Por el teorema de Pitágoras es evidente que

$$x^2 + y^2 = 1$$

Luego,

$$\frac{y}{1} = \operatorname{sen}\alpha = y \qquad \frac{x}{1} = \cos\alpha = x$$

Con esto podemos obtener otra identidad:

$$\textbf{4.}\quad x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Otra vez atendiendo al círculo unitario:

$$\textbf{5.}\quad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \textbf{6.}\quad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Podemos observar que $\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos x}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Por lo tanto, $\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2 + 1$

Entonces resulta la identidad número 7 y de forma análoga la 8.

$$\textbf{7.}\quad \sec^2\alpha = \tan^2 + 1 \qquad \textbf{8.}\quad \csc^2\alpha = \cot^2 + 1$$

Las identidades 4 a 8 también se llaman pitagóricas.

(Jiménez, 2010, p.148)

TABLA 7.2 Identidades elementales

1. $\operatorname{sen}\alpha \csc\alpha = 1$	**5.** $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
2. $\cos\alpha \sec\alpha = 1$	**6.** $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
3. $\tan\alpha \cot\alpha = 1$	**7.** $\sec^2\alpha = \tan^2 + 1$
4. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	**8.** $\csc^2\alpha = \cot^2 + 1$

(Jiménez, 2010, p.148)

Este autor en particular, utiliza el círculo unitario en el primer cuadrante para hallar todas las identidades que él considera elementales. Considero que este desarrollo con el círculo unitario es la demostración más sencilla de construir en conjunto con los estudiantes pues la hipotenusa tomaría el valor 1 y los cálculos se pueden simplificar notoriamente con la aplicación del Teorema de Pitágoras. Además las primeras 3 identidades las obtiene de un pequeño despeje de las "funciones trigonométricas recíprocas" ($\csc(\propto) = \frac{1}{sen\,(\propto)}$, $\sec(\propto) = \frac{1}{\cos(\propto)}$ $\cot(\propto) = \frac{1}{\tan(\propto)}$) que son planteadas en el mismo libro con anterioridad. A diferencia de los dos autores anteriores, Jiménez (2010) considera que $\tan(\propto) = \frac{sen(\propto)}{\cos(\propto)}$ y $\cot(\propto) = \frac{\cos(\propto)}{sen(\propto)}$ son parte de las identidades pitagóricas, mientras que los dos autores anteriores las llaman "identidades de cociente" e "identidades de razones".

Relación entre el seno y el coseno. De las fórmulas (1) y (2):

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} \qquad (1)$$

$$\text{y} \quad cos\ \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}. \qquad (2)$$

Elevando al cuadrado:

$$sen^2\ \alpha = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{OC}^2}, \qquad cos^2\ \alpha = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}.$$

Sumando miembro a miembro:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{OC}^2} + \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{MC}^2 + \overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}.$$

Pero por el teorema de Pitágoras $\overline{MC}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OC}^2$

$$\therefore \quad sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1.$$

Es decir: $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1.$

(Baldor, 2004, p.329)

Relación entre la cotangente y la cosecante y la tangente y la secante.
De la igualdad $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$. dividiendo por $sen^2\ \alpha$, tenemos:

$$\frac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = \frac{1}{sen^2\ \alpha}.$$

Separando: $$\frac{sen^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha} + \frac{cos^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = \frac{1}{sen^2\ \alpha}.$$

$$\therefore \quad 1 + cot^2\ \alpha = csc^2\ \alpha.$$

Si dividimos la igualdad $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ por $cos^2\ \alpha$:

$$\frac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\ \alpha}.$$

Separando: $$\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \frac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\ \alpha}.$$

$$\therefore \quad tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha.$$

(Baldor, 2004, p.330)

Baldor (2004) presenta la demostración de la “relación entre el seno y coseno” y la “relación entre la cotangente y la cosecante y la tangente y la secante”. La primera de esas relaciones es la que los autores anteriores llaman primera identidad pitagórica. Estos llegan a dicha identidad a través del teorema de Pitágoras, por su lado, este autor llega a esa construcción, pero a partir de plantear razones entre los lados de un triángulo rectángulo, nunca se menciona el teorema de Pitágoras. Mientras que la segunda relación de Baldor es parte de las identidades pitagóricas mencionadas por los autores anteriores. Por último, este cuarto autor, en su libro propone como ejercicios para el lector llegar a las restantes identidades fundamentales a partir de estas tres identidades.

Una última parte en esta fundamentación matemática refiere a los momentos en que estas/os autoras/es presentan leyes para poder resolver cualquier triángulo. En los cuatro libros las leyes, aunque estén enunciadas de diferentes formas, son mostradas con el mismo fin: resolver situaciones que puedan ser representadas por triángulos no necesariamente rectángulos.

Teorema 10.3.1 Ley de los senos

Supongamos que los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos de longitud a, b y c son como se muestran en la figura 10.3.1. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \qquad (1)$$

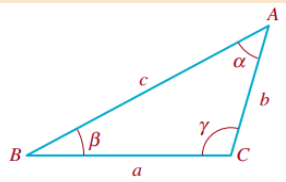


FIGURA 10.3.1 Triángulo general

(Zill y Dewar, 2012, p. 453)

Teorema 10.4.1 Ley de los cosenos

Sean los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos a ellos sean a, b y c, como se ve en la figura 10.3.1. Entonces

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \qquad (2)$$

(Zill y Dewar, 2012, p. 458)

LEY DE LOS SENOS

En cualquier triángulo, sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

(Boyle, 1990, p. 222)

LEY DE LOS COSENOS

Si a, b y c son los lados de un triángulo que están opuestos a los ángulos α, β y γ, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(Boyle, 1990, p. 238)

Ley de senos

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

(Jiménez, 2010, p. 159)

Ley de cosenos

Hasta ahora, con la ley de senos hemos aprendido a resolver triángulos oblicuángulos cuando tenemos:

a) Un lado y dos ángulos.
b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

La *ley de cosenos* nos será útil para resolver triángulos oblicuángulos siempre que conozcamos:

a) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
b) Los tres lados.

La **ley de cosenos** nos dice que en todo triángulo, el coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman, menos el cuadrado del lado opuesto, dividido todo entre el doble producto de los lados que forman dicho ángulo.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(Jiménez, 2010, p. 166)

415. LEY DE LOS SENOS. *"Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".*

(Baldor, 2004, p.372)

416. LEY DEL COSENO. "El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman".

(Baldor, 2004, p.373)

Para el Teorema del seno podemos ver que Zill y Dewar no mencionan la proporcionalidad entre los lados del triángulo con los senos de los ángulos del triángulo, mientras que los demás autores parten de la idea de proporcionalidad, lo que resulta interesante para presentar dentro del aula. Por otro lado, un aporte muy interesante es el que muestra Jiménez pues diferencia cuando es más útil aplicar uno u otro teorema. Por ejemplo, el teorema de seno es más útil en situaciones donde tenemos un lado y dos ángulos y cuando tenemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Mientras que el teorema del coseno será útil para cuando los datos sean dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o si tenemos los tres lados.

Fundamentos Didácticos

El aprendizaje de las matemáticas, por lo general, trae dificultades en los alumnos, estas dificultades pueden tener diversos orígenes los cuales están ligados con la complejidad de un objeto matemático, con los procesos de enseñanza, con procesos cognitivos o afectivos de los estudiantes y con las técnicas o recursos que se utilizan para enseñarlas. Particularmente, la enseñanza de la trigonometría se ha reducido a preparar estudiantes para mecanizar algoritmos, lo que hace que éste se forme unos conceptos carentes de significados (Salazar Méndez, 2020). Si hablamos de resolver específicamente ecuaciones trigonométricas es posible reconocer que los estudiantes ya han pasado por el aprendizaje de ecuaciones lineales de primer grado y segundo grado (entre otras) por ende ciertas generalizaciones o propiedades del álgebra para hallar una incógnita son parte de su sistema de interiorización. Pero hay que diferenciar el tipo de incógnita que se debe encontrar para resolver una ecuación trigonométrica, pues en este caso se debe hallar un ángulo. Para resolver este tipo de expresiones, conformadas con razones trigonométricas, se necesita de ciertas abstracciones que solo se logran con un alto grado de significación.

Montiel (2014), describe el fenómeno de mecanizar algoritmos, para resolver ecuaciones o identidades trigonométricas, como una aritmetización de la trigonometría, pues se hace énfasis en la operación matemática y no en la actividad matemática en la cual juega un papel importante lo geométrico. Así, por ejemplo, en el manejo de las razones trigonométricas, donde se usarían diferentes representaciones, se enfatiza en la solución de triángulos rectángulos donde se le da al estudiante un problema con datos necesarios para que sólo reemplace en una fórmula y encuentre el lado faltante de dicho triángulo. Este tratamiento es usado en los libros de texto, donde sólo se les da un uso ilustrativo a los triángulos, pues no se constituyen en una construcción geométrica teniendo en cuenta sus propiedades y relaciones entre lados y ángulos.

En el artículo de Téllez Vega, Nolasco Negrete, Juárez López y Juárez Ruiz (2021) se presentan distintas experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver problemas de libros de textos y luego algún problema de trigonometría fuera del aula con materiales reales. Ante el tipo de problemas que se les presentaba en el primer momento se concluyó que los alumnos tienen conflictos porque por lo general no recuerdan las fórmulas o pasos a seguir, quisieran aplicar en todas las resoluciones el Teorema de Pitágoras sin tener en cuenta el tipo de triángulo que se daba en el problema, y estudiantes que identificaban que el triángulo no cumplía con las condiciones para aplicar Pitágoras no lograban decidir si necesitaban el

Teorema del seno o el del coseno y comenzaban aplicando uno de ellos al azar. Por otro lado, en la situación problemática que resuelven fuera del aula muchos alumnos tienen dificultades para manipular instrumentos de medición, sin embargo, se sienten atraídos por cómo utilizarlos y su interés para saber cómo funcionan los distintos instrumentos es mayor. Además, en el exterior notaron que los estudiantes se sentían más relajados, libres y capaces de trabajar y aplicar conceptos matemáticos en el entorno social.

“Otra dificultad tiene que ver con la complejidad para la comprensión del concepto razón” (Freudenthal, 2001), involucrado explícitamente en el tema de las razones trigonométricas. Las investigaciones realizadas con profesores en formación o en ejercicio, señalan que éstos tienen deficiencias en la comprensión de ciertos temas trigonométricos (Brito y otros, 2004; Fi, 2006; Chacón y otros, 2007). A las/os docentes les cuesta desprenderse de sus concepciones de enseñanza adquiridas a lo largo de su experiencia profesional, encontrándose concepciones que atribuyen a los estudiantes la responsabilidad de su fracaso (Briguenti, 1998; Fiallo Leal, 2010). Algunas de las concepciones erróneas que mencionan los autores están estrechamente relacionadas con la ausencia de sentido al momento de interpretar problemas y el uso mecánico de las fórmulas o teoremas para la resolución de los problemas.

Momentos en la propuesta de enseñanza desarrollada en aulas de 6to año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria

Recupero algunos momentos del avance de la residencia desarrollada en aulas de secundario a partir de estos núcleos conceptuales de la trigonometría que me permiten la reflexión en relación a las instancias de estudio de la temática anteriormente descripta.

Plataforma petrolera

Esta clase está destinada a la construcción del Teorema del Seno a partir del uso de la razón trigonométrica seno de un ángulo agudo. La primera situación plantea una introducción a la situación del petróleo en la provincia de La Pampa y luego se plantea un problema en relación con el petróleo en el Mar Argentino.

En nuestra provincia contamos con más de

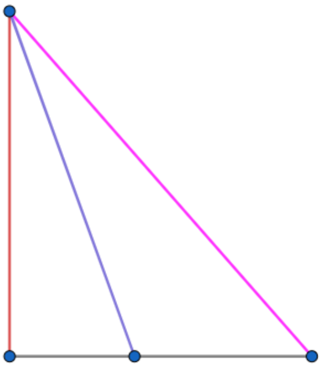
1000 pozos de donde se extrae petróleo. Este año La Pampa llegó al sexto lugar de producción de este recurso a nivel nacional, con un promedio actual de producción de petróleo igual a 470.000 barriles por mes en junio. Se estableció al 5 de septiembre como el Día del Petróleo en La Pampa.

Vinculada a la extracción de petróleo se conoció la siguiente situación:

Un ingeniero de plataformas petrolíferas necesita agregar unos cables de acero a un caño petrolero (perpendicular a la base) encargado de sostener un quemador de gas para cierta plataforma que está en el Sur del Mar Argentino. Estos cables de acero deben conectar el caño petrolero con la base de la plataforma, por lo tanto, es de suma importancia conocer el ángulo formado entre estos dos cables, ya que esto permitirá que el quemador de gas no caiga al mar. ¿Cuál es el ángulo que se pide calcular? ¿Cómo podría calcularlo?

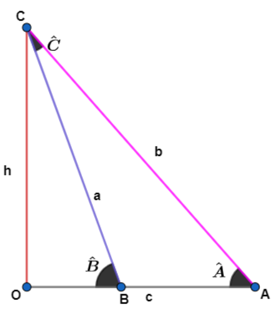
Si hacemos zoom a la zona de trabajo del ingeniero tendríamos la siguiente situación:

Aquí podemos observar dos triángulos rectángulos con la altura en común:



esquema

A continuación, es conveniente identificar cada lado y cada ángulo (de ambos triángulos) con una letra para luego aplicar la razón trigonométrica seno de un ángulo agudo y obtener la construcción del Teorema del Seno.



Una vez que tengamos todos los lados y ángulos identificados tenemos que identificar que el ángulo que nos va a permitir ayudar al arquitecto es $\hat{C}$. Como la idea es que las/os alumnas/os utilicen la razón trigonométrica seno, las posibles intervenciones docentes giran alrededor de: ¿qué tipo de triángulo se muestra en la figura?, ¿qué razón trigonométrica podríamos usar para hallar el ángulo $\hat{C}$?

Posiblemente las/os estudiantes quieran usar $sen(\hat{C}) = \frac{c}{b}$ pero aquí tendríamos el primer error pues c es la longitud de toda la base del triángulo mayor COA, esto permite proponer encontrar otra fórmula para poder hallar el ángulo $\hat{C}$ usando la razón trigonométrica seno. ¿Cómo se podría aplicar la razón seno para los otros triángulos? (COA y COB)

COA	COB
$sen(\hat{A}) = \frac{h}{b}$	$sen(\hat{B}) = \frac{h}{a}$

Una vez construida la razón para ambos triángulos analizamos la posibilidad de que, desde ambas igualdades, se despeje la variable h y se igaule para llegar a:

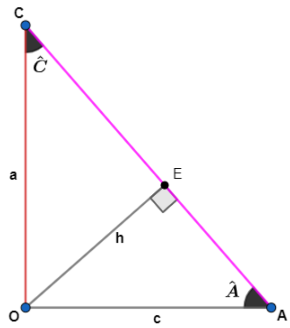
$$\boxed{sen(\hat{A}).b = sen(\hat{B}).a}$$

Luego de obtener esta igualdad debemos determinar cuál es el ángulo mayor y cuál el menor entre $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Y cual es el lado de mayor y el de menor longitud entre a y b .

para llegar a que:

$$\boxed{\frac{sen(\hat{A})}{a} = \frac{sen(\hat{B})}{b} \quad \text{ec. (1)}}$$

Ahora bien, todavía no tenemos como incógnita el ángulo que necesitamos hallar. Entonces para ello es necesario proponer otra igualdad que vamos a construir usando la figura:



Nuevamente, la idea es plantear ecuaciones utilizando la razón seno para los triángulos AEO y OEC.

AEO	OEC
$sen(\hat{A}) = \frac{h}{c}$	$sen(\hat{C}) = \frac{h}{a}$

Una vez construida la razón para ambos triángulos, de ambas igualdades se despeja la variable h y por igualación se llegar a:

$$\boxed{sen(\hat{A}).c = sen(\hat{C}).a}$$

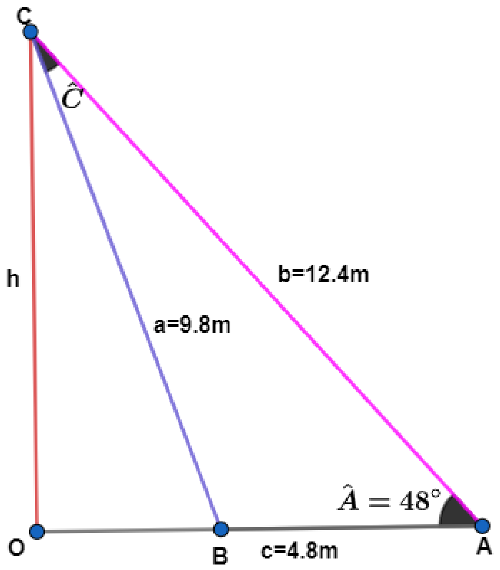
Luego de obtener esta igualdad debemos determinar cuál es el ángulo mayor y cuál el menor entre $\hat{A}$ y $\hat{C}$. Y además, cual es el lado de mayor y el de menor longitud entre a y c para llegar a:

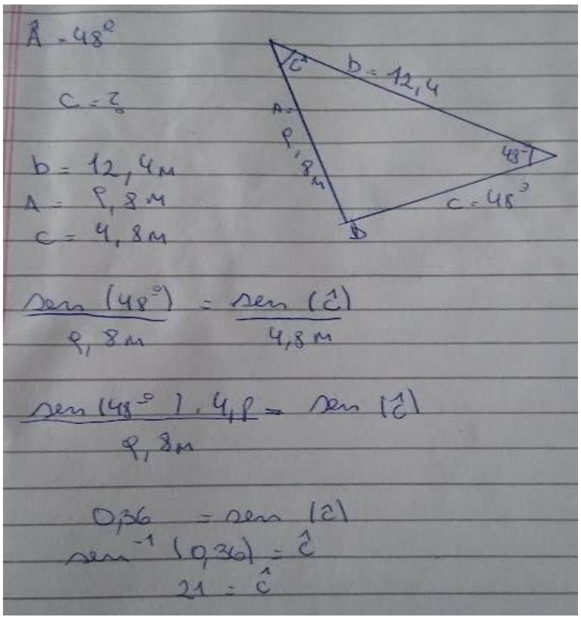
$$\boxed{\frac{sen(\hat{A})}{a} = \frac{sen(\hat{C})}{c}}$$

Como último paso, tenemos que retomar la ec. (1) para concluir con:

$$\boxed{\frac{sen(\hat{B})}{b}=\frac{sen(\hat{A})}{a}=\frac{sen(\hat{C})}{c}}$$

La situación problemática, particularizada con los siguientes datos, permitió llegar a resoluciones como:

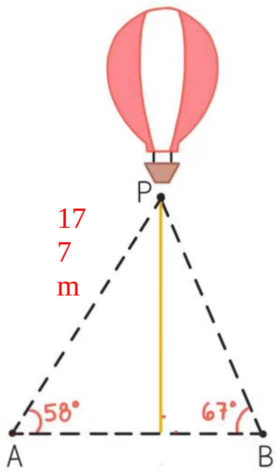




El proceso de llegar a la ley de los senos nos ha permitido trabajar también con situaciones como las que describimos a continuación.

Turista argentino en Qatar

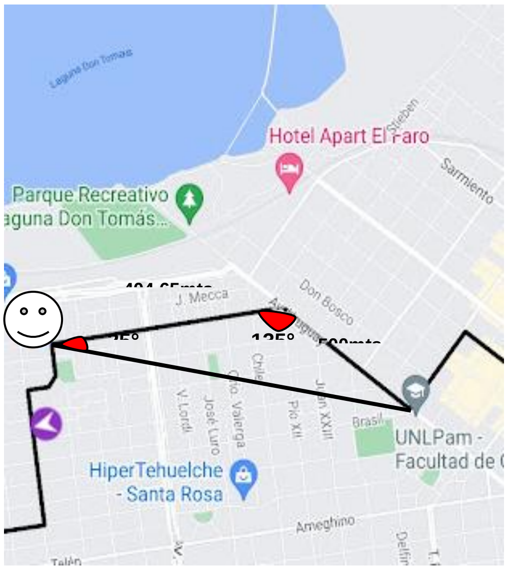
Un turista argentino se ganó un viaje a Qatar que incluía un recorrido por todos los estadios de la ciudad de Qatar en globo aerostático. Cuando pasaba justo por el estadio Lusail, lugar de juego del primer partido de la selección, tomó una foto del estadio completo. Este turista necesitaba saber el largo del estadio pues quería calcular cuánto tiempo iba a tardar caminando desde la entrada hasta su asiento que justo quedaba al otro lado de donde él ingresaba. Pero solo contaba con la longitud del punto A hasta el globo y los ángulos de los extremos del estadio (58° y 67°) como se muestra en el gráfico:



Necesitamos encontrar la distancia total del estadio para poder ayudar a este hincha.

Viajando en la línea 2 de ida

Un estudiante de sexto año de un colegio de la ciudad de Santa Rosa necesita calcular la distancia en línea recta que se forma desde la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam hasta su casa (en la imagen está representada con una carita) para un trabajo práctico del curso introductorio de matemática. Entonces se le ocurrió utilizar la aplicación EmtuLugar. Para eso miró el recorrido de la línea 2 de ida, mientras iba viajando y observó que solo cuentan con los datos que se muestran en la imagen.



Calcular la distancia entre la facultad y la casa del estudiante.

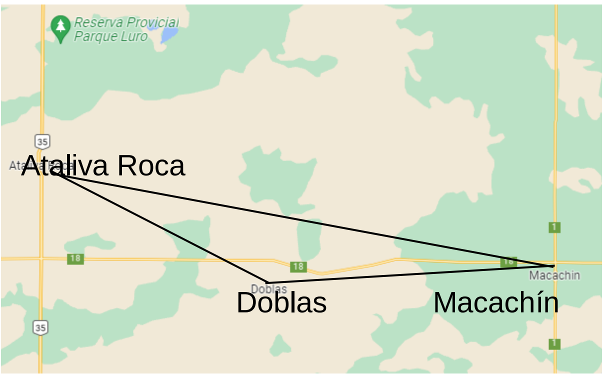
Actividad: Distancias y ángulos en La Pampa

Utilizando una página web se pueden calcular las distancias entre dos puntos cualesquiera sobre el mapa en línea recta y los ángulos (sentido antihorario) entre ellos. En este caso se obtuvieron los siguientes:

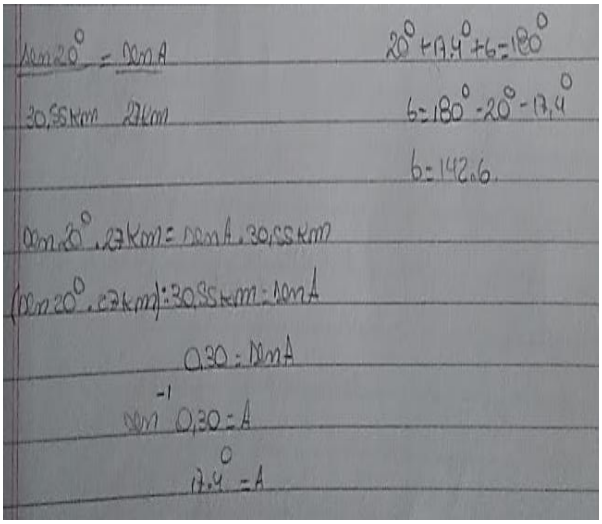
Ataliva Roca - Doblas: 27km

Doblas - Macachín: 30,55km

Macachín - Ataliva Roca - Doblas: 20°



Hallar los ángulos restantes y la distancia entre Ataliva Roca - Macachín.



$$\frac{\text{sen } 20^\circ}{30{,}55\text{ km}} = \frac{\text{sen } A}{27\text{ km}}$$

$$20^\circ + 17{,}4^\circ + 6 = 180^\circ$$

$$6 = 180^\circ - 20^\circ - 17{,}4^\circ$$

$$6 = 142.6.$$

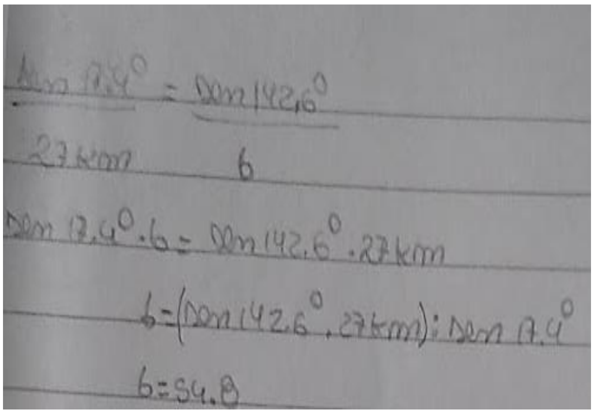
$$\text{sen } 20^\circ . 27\text{ km} = \text{sen } A . 30{,}55\text{ km}$$

$$(\text{sen } 20^\circ . 27\text{ km}) : 30{,}55\text{ km} = \text{sen } A$$

$$0{,}30 = \text{sen } A$$

$$\text{sen}^{-1}\ 0{,}30 = A$$

$$17{,}4^\circ = A$$



$$\frac{\text{sen } 17{,}4^\circ}{27\text{ km}} = \frac{\text{sen } 142{,}6^\circ}{6}$$

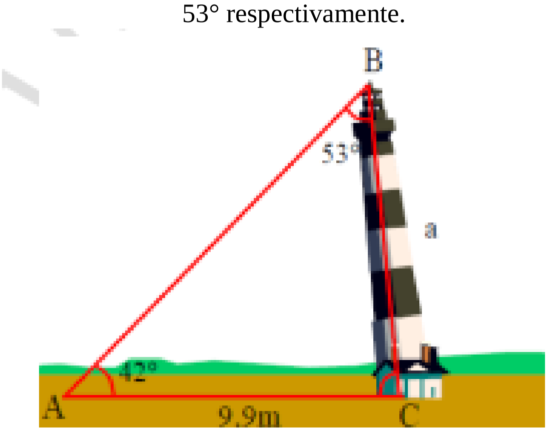
$$\text{sen } 17{,}4^\circ . 6 = \text{sen } 142{,}6^\circ . 27\text{ km}$$

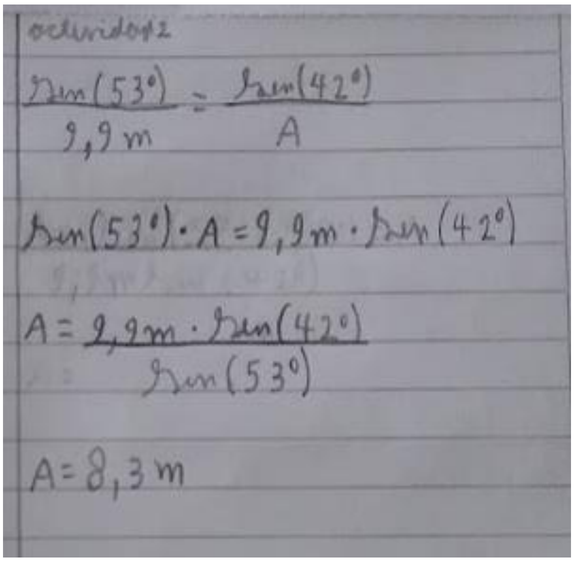
$$6 = (\text{sen } 142{,}6^\circ . 27\text{ km}) : \text{sen } 17{,}4^\circ$$

$$6 = 54.8$$

Actividad: el faro

Hallar la longitud del faro de la laguna Don Tomás de nuestra ciudad, que está inclinado. Se sabe que en el triángulo ABC – que usamos para armar un esquema– el lado b mide 9,9 m, los ángulos A, B miden 42° y 53° respectivamente.





actividad 2

$$\frac{\text{sen}(53^\circ)}{9{,}9\text{ m}} = \frac{\text{sen}(42^\circ)}{A}$$

$$\text{sen}(53^\circ) \cdot A = 9{,}9\text{ m} \cdot \text{sen}(42^\circ)$$

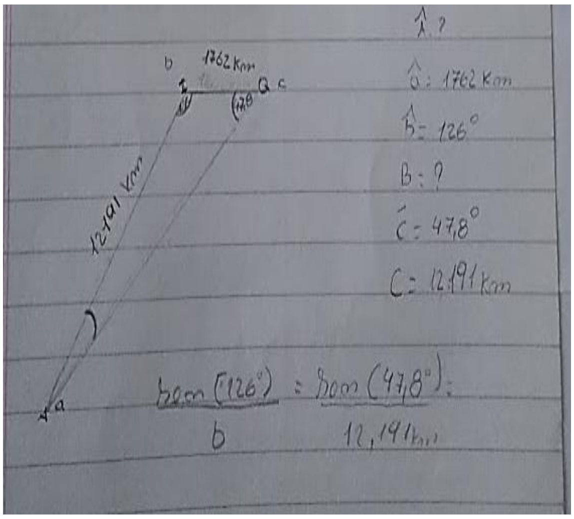
$$A = \frac{9{,}9\text{ m} \cdot \text{sen}(42^\circ)}{\text{sen}(53^\circ)}$$

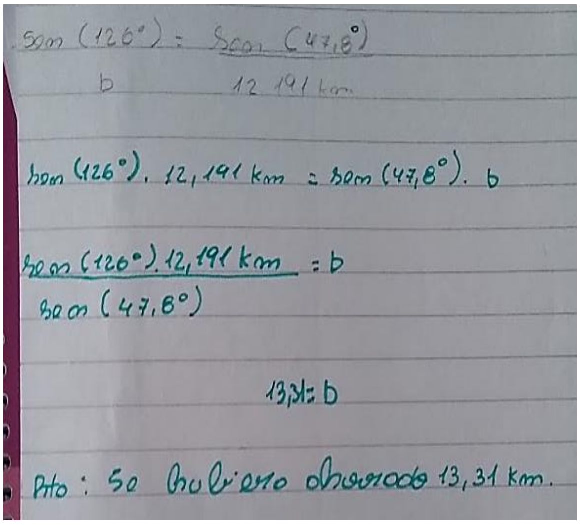
$$A = 8{,}3\text{ m}$$

Actividad: Volando al mundial

Un hincha de la Scaloneta está por comenzar su vuelo desde Argentina a Qatar. Este hincha en realidad vive en Israel pero desde marzo que está visitando a su familia en Argentina. Antes de comenzar su viaje a Qatar recordó que la entrada para el estadio Lusail, le quedó en Israel, por lo tanto, deberá viajar desde Argentina a Israel y desde Israel a Qatar. Con un sitio

web calculó la distancia entre Argentina e Israel y entre Israel y Qatar. Las mismas son, 12191 km y 1762 km respectivamente. Además, encontró que el ángulo comprendido entre Argentina-Qatar-Israel es de 47.8° y el ángulo comprendido entre Qatar-Israel-Argentina es 126°.
Si este hincha hubiera tenido la entrada con él en Argentina, ¿cuántos kilómetros se hubiera ahorrado?





Estas/os estudiantes realizaron procedimientos útiles y de forma correcta, en un caso faltó realizar una diferencia entre este valor hallado y la suma de las distancias entre Argentina-Israel, Israel-Qatar, en otro caso no se expresa la respuesta en palabras, es decir no deja registro de la interpretación del resultado.
Estas situaciones ayudan a cuestionarnos como docentes ya que parecen parte de lógicas habituales escolares en que no se vuelve y se revisan los resultados en el contexto de las situaciones problemáticas perdiendo así un poco más de los sentidos y de la potencia de los conceptos como instrumentos de resolución de situaciones.
Creo que en las actividades se buscó siempre presentar lo de el poder de calcular distancias inaccesibles o sin necesidad de recorrerlas para atender la situación

Reflexiones finales

Luego del análisis de varios libros, tanto los usados en la Universidad para mi formación como los usados para buscar actividades y proponer en el aula, puedo decir que todos siguen una misma lógica de trabajo. Primero se presenta la teoría y luego se dan ejemplos o actividades prácticas para que el alumno desarrolle. En el rol de profesores se nos complejiza mucho romper con esos esquemas que son todas las referencias que siempre hemos tenido. En los libros utilizados en la Universidad los contenidos están ofrecidos con toda la simbología y terminología propia de la asignatura, de manera compleja; a diferencia de los libros de texto, donde los contenidos están desarrollados de forma más didáctica y oportuna para poder enseñar dentro del aula. Ahora bien, ha quedado muy estudiado que el tipo de propuestas en estos sentidos tradicionales de enseñanza resulta poco significativa para las /os estudiantes. Por ello, considero indispensable en nuestro trabajo como futuros docentes acercar a las/os alumnas/os a situaciones o problemas del mundo real teniendo en cuenta el contexto social y cultural de sus alrededores. Surge así la necesidad de hacer notar la importancia que tienen las identidades y las ecuaciones trigonométricas en el desarrollo histórico de la ciencia, por ejemplo, el uso del astrolabio –instrumento astronómico que sirve para determinar la latitud, la longitud, la altura o la posición de los cuerpos celestes– tanto como lo instrumentales que resultan teoremas como el del seno y el del coseno para calcular la medida de una antena que se encuentra en la esquina de su casa ó la montaña que pudieron escalar en algunas vacaciones. Esto se sostuvo en la propuesta de aula al seleccionar situaciones que permitan fortalecer la potencia conceptual de contar con herramientas de cálculo para conocer distancias inaccesibles, argumento que forma parte de los sentidos históricos de la trigonometría.

Referencias bibliográficas

Aguilar Márquez, A.; Bravo Vázquez, F.V.; Gallegos Ruiz, H.A.; Cerón Villegas, M. y Reyes Figueroa, R. (2009). *“Geometría y trigonometría”*. México: Pearson Educación.

Baldor, J.A. (2004). *Geometría plana y del espacio.* México: Publicaciones Cultural.

Boyle, P. J. (1990). *Trigonometría con Aplicaciones*. México: Harla.

Colegio Nacional de Matemática. (2009).*“Geometría, trigonometría y geometría analítica”*. Primera Edición. México: Pearson Educación.

Colera Jiménez, J. y de Guzman Ozamiz, M. (1995) *“Bachillerato Matemática 3”*. Madrid: Anaya.

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. (2014) *“Módulo 5: Trigonometría”*. La Plata, Argentina. Universidad Nacional de La Plata. Editorial Universitaria.

Fernández Cerdeira, S. y Soria, S. (2019). Trigonometría. *Matemática: entre la secundaria y la universidad*. Buenos Aires: UNICEN.

Fiallo Leal, J.E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Valencia: Universidad de Valencia.

Galindo Rodríguez, E.G., Soto Garcia, V.R. y Zuno Ibarra, B.E. (2017). *"Precalculo*". Guadalajara: Editorial Universitaria.

Jiménez, R. (2010). *Matemáticas II. Geometría y trigonometría*. México: Pearson Educación.

Ministerio de Educación. (2016). *"Matemática 10° Grado. Texto del Estudiante"*. Ecuador: SMEcuaediciones.

Proyecto Educativo Pilares. (2022). *Trigonometría. Matemática. Educación Secundaria 5.* https://proyectopilares.com.pe/

Salazar Méndez, F. (2020). *Situaciones didácticas para el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales a partir de un enfoque geométrico*. Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Sessa, C. (2017). *Hacer Matemática 2/3.* Buenos Aires: Estrada.

Subsecretaría de coordinación. Ministerio de Cultura y Educación. (2013). *Materiales curriculares para el ciclo orientado de la educación secundaria - Matemática*. La Pampa: Gobierno de La Pampa.

Téllez Vega, G.I.; Nolasco Negrete, G.D.; Juárez López, J.A. y Juárez-Ruiz, E. (2021). Experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría. *Números: revista de didáctica de la matemática*, 8, 7-25.

Universidad Nacional de Rosario. (2017). *Trigonometría 4° año. Matemática".* Departamento de Matemática. Rosario, Argentina: Editorial Universitaria.