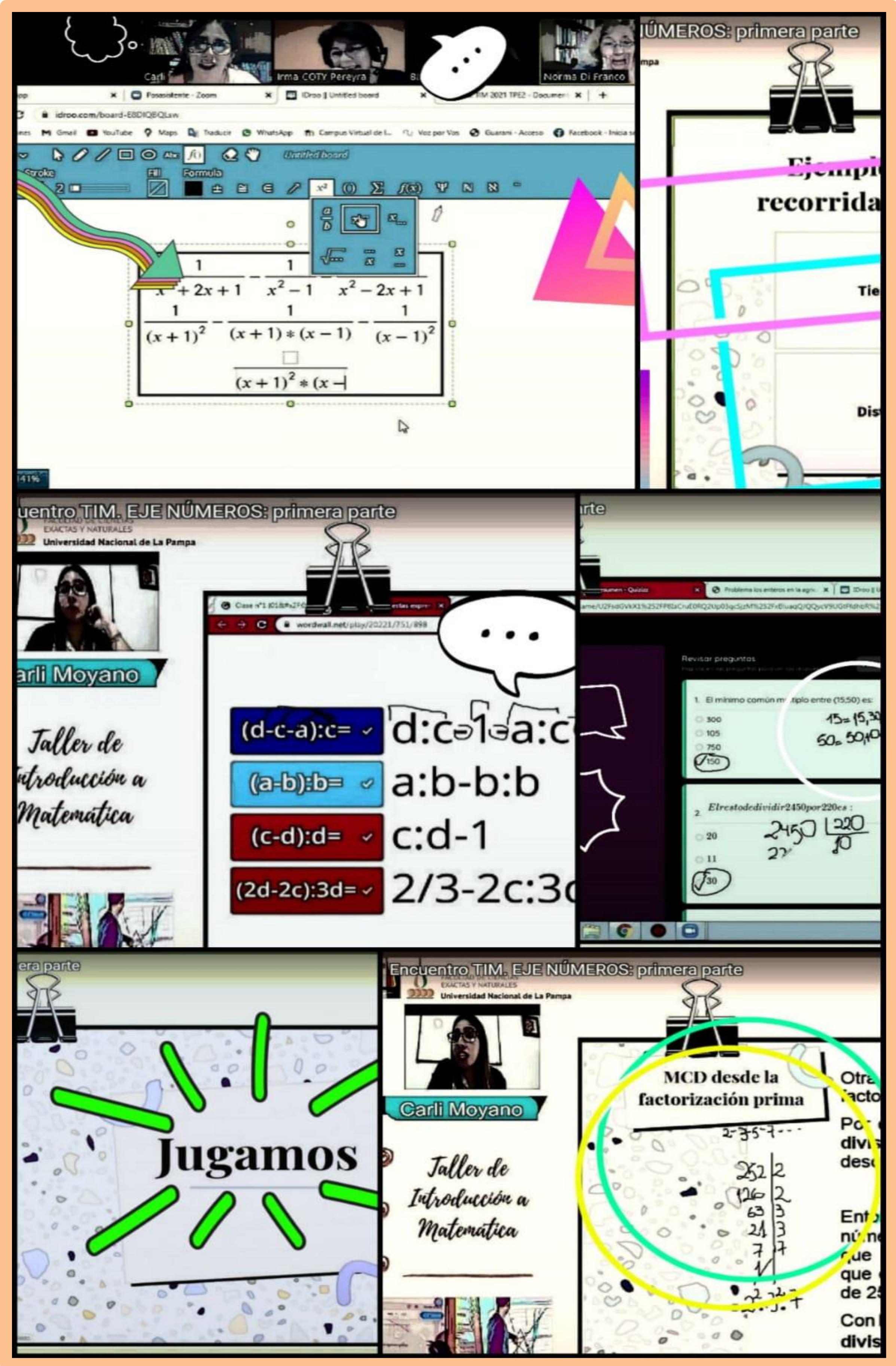


Carli
Irma COTY Pereyra
Norma Di Franco
ÚMEROS: primera parte
Ejempl
recorrida
Encuentro TIM. EJE NÚMEROS: primera parte
Universidad Nacional de La Pampa
Carli Moyano
Taller de Introducción a Matemática
(d-c-a):c=
d:c-1-a:c
(a-b):b=
a:b-b:b
(c-d):d=
c:d-1
(2d-2c):3d=
2/3-2c:3d
Revisar preguntas
1. El mínimo común múltiplo entre (15;50) es:
300
105
750
150
2. El resto de dividir 2450 por 220 es :
20
11
30
Jugamos
MCD desde la factorización prima

Carla Moyano
carlamoyano@outlook.es
El poder de contar y de medir
*Campo de Prácticas*, Año 2, Nº 1, octubre 2022
Sección: Artículos, pp. 103-116
ISSN 2118-8787

# El poder de contar y de medir

**Resumen**

En el presente trabajo se muestra el desarrollo de la selección, elaboración e integración de contenidos como proceso previo a la construcción del material para el Taller de Introducción a la Matemática que se dicta para el ingreso al nivel universitario. En este tramo se focaliza en contenidos del conjunto de los números naturales, de los números enteros y de los racionales. La propuesta se apoya en unas fundamentaciones matemáticas y didácticas que organizan su sentido. En diferentes momentos se presentan problemáticas y recursos tecnológicos que resultaron instrumentales en la presentación virtual, desde los que se plantean el abordaje de las conceptualizaciones. Se incluyen también fragmentos y enlaces que permiten analizar el tratamiento de estas temáticas en situación de enseñanza, al desarrollarlas como estudiante residente del Profesorado en Matemática.

**Palabras clave:** Números Naturales, Números Enteros, Números Racionales, fundamentos de enseñanza, taller universitario de introducción a la matemática

## The power to count and measure

**Abstract**
This paper shows the development of the selection, elaboration and integration of contents as a process prior to the construction of the material for the Introduction to Mathematics Workshop taught for university entrance. This section focuses on the contents of the set of natural numbers, integers and rational numbers. The proposal is based on mathematical and didactic foundations that organize its meaning. At different times, problems and technological resources that were instrumental in the virtual presentation are presented, from which the conceptualizations are approached. Fragments and links are also included to analyze the treatment of these topics in a teaching situation, when developing them as a resident student of the Mathematics Teacher Training Program.

**Keywords:** Natural Numbers, Integer Numbers, Rational Numbers, teaching fundamentals, university workshop on introduction to mathematics

**Una propuesta educativa de reconstrucción de campos numéricos que tienen gran protagonismo en la Educación Secundaria**

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de elementos que guardan una serie de propiedades estructurales, por ejemplo, el sistema más usual en aritmética natural está formado por el conjunto de los números naturales, con la suma, la multiplicación y las relaciones de orden aditivo. Aunque hoy nos es muy familiar el concepto de número, resulta un caso de mucha fuerza para pensar cómo fueron surgiendo los diferentes conjuntos dentro de las sociedades y los momentos, y analizar las construcciones conceptuales generadas a partir de necesidades –matemáticas, sociales, históricas- en vez de asumirlas como productos cerrados alojados en algún manantial de ideas. Aquello del conjunto de los Números Naturales elaborado por la necesidad de contar, o los naturales ampliados por el agregado del 0 (cero) para pensar en un conjunto de los números cardinales, el conjunto de los Números Racionales ante la necesidad de dar solución a la división en el conjunto de los naturales, o el conjunto de los Números Enteros para poder resolver en forma general la sustracción, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo.

Así, este trabajo tiene como propósito revisar y profundizar el análisis de diferentes libros sobre la didáctica y fundamentos de la matemática y diversas propuestas editoriales acerca del estudio de los conjuntos numéricos, para poder proponer metodologías alternativas al abordar los conceptos en el Taller de Integración Matemática –TIM– dictado por las/os alumnas/os de la residencia del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa.

En esta propuesta se presentan contenidos cuyo estudio es central en toda escolaridad secundaria en nuestros contextos nacionales. En un principio me concentro en la revisión del conjunto de los números naturales, dentro de él las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación), propiedades de la suma y del producto y jerarquía de las operaciones. Luego, y dentro del conjunto de los números enteros, se abordan conceptualizaciones de valor absoluto, operaciones, reglas de los signos en el campo multiplicativo, cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de la división, los números primos, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, ambos desde la factorización prima. Con respecto a los racionales, se lleva adelante solo un abordaje que permita discutir algunas complejidades de la proporcionalidad. En la construcción siempre se tuvieron como referencias las prescripciones de los materiales curriculares de La Provincia de La Pampa y su ampliación se organiza a partir de la búsqueda de varias propuestas editoriales.

**Nudos de fundamentos matemáticos**

Se presentan en este apartado fundamentos sobre los conceptos de Conjuntos Numéricos – números naturales, enteros y racionales, sus operaciones y sus propiedades– desde la mirada de diferentes autores matemáticos. Todos los conceptos son analizados desde el punto de vista matemático y didáctico para fundamentar las reflexiones y a partir de las investigaciones realizadas, elaborar opciones para mejores conceptualizaciones en nuestra práctica.

Comenzamos con los números naturales y esta complejidad de pensar que es un conjunto infinito y a su vez el conjunto más pequeño dentro de los números reales ya que, por definición, es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de R.

Tomo la definición de Gastaminza (1970) que es una referencia que marcó mi formación universitaria:

2.2. <u>NUMEROS NATURALES</u>

Para definir el conjunto N de los números naturales y teniendo en cuenta que 1 ε N y que si un número x ε N también x+1 ε N, comenzaremos por considerar todos los subconjuntos de R que satisfacen estas propiedades.

<u>Definición</u>. Un subconjunto A de R se dice <u>inductivo</u> si satisface:

1. 1 ε A
2. Si x ε A entonces x+1 ε A

<u>Definición</u>. Se llama conjunto N de los números naturales a la intersección de todos los subconjuntos inductivos de R.

Resulta inmediatamente que N es inductivo y que todo conjunto inductivo contiene a N, es decir N es el menor de los subconjuntos inductivos de R (con respecto a la relación de inclusión). En particular, como los números positivos forman un conjunto inductivo, los números naturales son positivos.

<u>PROPIEDADES DE N</u>.

(1) <u>Principio de inducción</u>.

(2) <u>Principio de buena ordenación</u>.

(3) <u>N es cerrado con respecto a la suma y a la multiplicación</u>.

(4) <u>Factorización única</u>: Todo número natural distinto de 1 puede escribirse como un producto de números naturales primos y esta descomposición es única salvo el orde de los factores.

*Imagen 1. Definición recuperada de Gastaminza, 1970, p.45.*

Podemos ver que en este libro se define al conjunto de los números naturales desde el concepto de anillos y sus propiedades también basadas en ese mismo principio. Con la misma lógica, Gentile (1984) define a los números naturales desde el punto de vista de las estructuras algebraicas.

**Definición**

Llamaremos conjunto de *números naturales* al subconjunto, denotado por N, caracterizado por las propiedades

N 1) N es inductivo

N 2) Si $H \subset R$ es un conjunto inductivo entonces $N \subset H$

En otros términos, si $a \in R$, $a \in N$ si y solo si para todo subconjunto inductivo H de R, $a \in H$.

*Imagen 2. Definición recuperada de Gentile, 1984, p. 45.*

En relación al conjunto de los Números Enteros, Gastaminza (1970) lo define:

2.3. NUMEROS ENTEROS.

El conjunto Z de los números enteros es el subconjunto de R formado por los números naturales, sus simétricos y el 0.

$$Z = N \cup \{0\} \cup \{x \in R : -x \in N\}$$

Como para todo $x \in N$ es $x > 0$, resulta $-x < 0$.

Luego los enteros positivos son los naturales y los enteros negativos los simétricos de los naturales. Observemos que $m \in Z$ si y solo si $-m \in Z$.

Z es un subconjunto propio de R porque los inversos de los números enteros distintos de 1 y -1 no son enteros. Basta verificarlo para los enteros positivos: si $m \in Z$ y $m > 1$ por las propiedades 19 y 20 es $0 < m^{-1} < 1$ y por lo tanto $m^{-1} \notin Z$.

Propiedades de Z.

(1) Z es cerrado con respecto a la suma y a la multiplicación y Z verifica las propiedades S1, S2, S3, S4, M1, M2, M3, D y S. (También 1,2,3,4 y 6 que se deducen de ellas). Esto se expresa diciendo que Z es un anillo conmutativo sin divisores de cero. Es claro que la relación de orden restringida a Z verifica 01,02, 03 y 04.

Como vale la propiedad S4, la ecuación $b + x = a$, con $a,b \in Z$ tiene siempre solución en Z, es decir Z es cerrado con respecto a la diferencia. En cambio Z no verifica M4 pues ya vimos que los inversos de los enteros distintos de 1 y -1 no pertenecen a Z. De modo que la ecuación $b.x = a$, con $a,b \in Z$, $b \neq 0$ no siempre tiene solución en Z, es decir no siempre es posible la división de un entero a por otro $b \neq 0$. Existe en cambio la llamada "división entera".

(2) Z es numerable.

(3) Algoritmo de la división entera. Para todo par de enteros a,b con b $\neq$ 0, existen dos enteros q y r, llamados el cociente y el resto respectivamente de dividir a por b, unívocamente determinados, tales que: $a = q.b + r$ y $0 \leq r < |b|$ .

(4) Factorización única. Todo número entero distinto de 0 , 1 , -1 se puede escribir como producto de $\pm 1$ por enteros primos positivos y esta descomposición es única salvo el orden de los factores.

La propiedad (1) es fácil de verificar y la (2) ya fue demostrada. Probaremos la (3) y la (4) al final del capítulo para no cortar el hilo de la exposición.

*Imagen 3. Definición recuperada de Gastaminza, 1970, p.50.*

Gastaminza al igual que con los naturales, define al conjunto de los Números Enteros desde la inducción. Gentile (1984), en sus notas de Álgebra lo define desde las estructuras de anillo.

## Fundamentos de Matemática Educativa

En esta breve presentación se analizan problemáticas presentes al momento de enseñar y aprender sobre conjuntos numéricos. Siguiendo a Robinson y Rubby (2011), uno de los señalamientos radica en que es importante conocer cómo se desarrolla el concepto de “valor posicional” (p. 117) de las cifras de un entero positivo en los primeros años de enseñanza de la matemática, para luego poder abordar las operaciones y sus propiedades. Por otra parte, las dificultades las focalizan en las propiedades de las operaciones, en particular, con la propiedad distributiva del producto respecto a la suma; y uno más de los problemas que marcan es el que está centrado en la divisibilidad.

Pochulu (2018) refiere a la identificación de los siguientes problemas vinculados a la enseñanza de la divisibilidad:

> - el primer problema que se presenta es el de determinar si un número (escrito en su expresión decimal, factorial, factorial prima, en base al algoritmo de la división y en base a la propiedad distributiva) es divisor, factor, divisible o múltiplo de otro número expresado en esas mismas formas.
>
> -Por otra parte, se identifica la dificultad de hallar todos los divisores de un número (chico, grande, producto de números primos grandes y cuadrado perfecto).
>
> -También es común que a los alumnos les cueste determinar la cantidad de divisores naturales de un número, identificar la cantidad de divisores de un número natural conociendo la cantidad de divisores de su duplo o cuadrado. (p. 33)

Todas estas problemáticas las identificamos como muy comunes al trabajar con las/os alumnas/os de secundario de nuestros contextos.

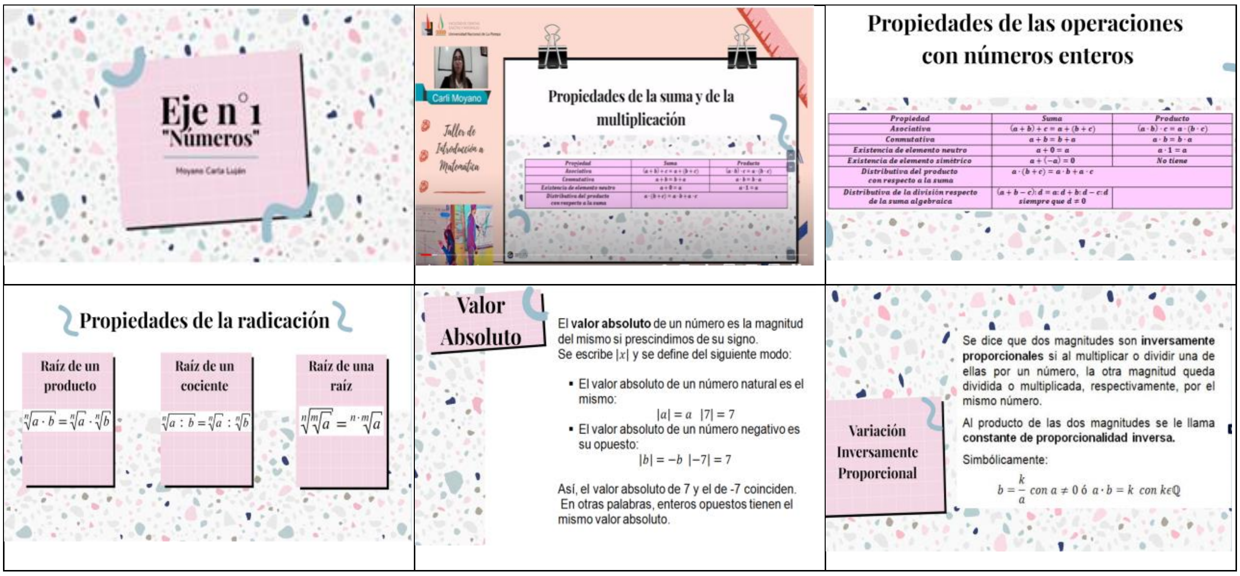
En el conjunto de los números enteros, López González (2017) expresa que estos números forman parte de los conceptos matemáticos que generan dificultades en los procesos de aprendizaje y que las dificultades se presentan con las operaciones. Iriarte, Jimeno y Vargas (1991) entienden que la dificultad está en entender al número como cantidad, que ante la pregunta a un/a estudiante acerca de si tiene sentido en una situación de la vida real realizar – (–3) y la respuesta negativa, surge la complejidad de conceptualizar la suma como un aumento y, cuando se les pregunta a los/as alumnos/as que número sumado a 7 da como resultado 2, también hay dificultades relacionadas con el error entre enteros negativos y enteros positivos. Los investigadores sostienen que para poder realizar la caracterización formal de los números enteros se deben emplear estrategias que permitan al estudiante romper la conceptualización de número como representación de lo real a una más abstracta que permita interpretar y comprender hechos y fenómenos de la vida cotidiana. Otra dificultad presente con esta estructura de números está en la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma algebraica que, según Pluvinage y Flores (2016), y a partir de proponer una construcción de Descartes (1637) como una buena interpretación geométrica del producto de dos números, se basa en la carencia general en la justificación de la multiplicación de dos números con signos, la regla de los signos y la ausencia de representación sensible de este producto. Explican los autores que estas problemáticas se producen al "pasar por alto la visualización gráfica como una parte didáctica fundamental con la que toman sentido algunos conceptos y puede construir la base de una enseñanza que no pondere el álgebra sobre la geometría" (p. 131).

En relación con las dificultades identificadas al trabajar con números racionales, nos concentramos particularmente en las vinculadas a la enseñanza y al aprendizaje de las proporcionalidades. Según lo expresan Ramírez e Hipólito Hernández (2017), a pesar de que las/os alumnas/os pueden resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa, no tienen un concepto claro de qué es la "proporcionalidad" (17), necesitan incorporar la identificación y el uso de la razón en el desarrollo de la capacidad de diferenciar situaciones lineales de las no lineales y la identificación de precursores en el desarrollo del reparto proporcional. Los autores sostienen que

En esta investigación observamos como la mecanización de procesos es un obstáculo en la meta cognición de los alumnos, impidiéndoles utilizar su razonamiento analógico para determinar problemas lineales de los no lineales. De acuerdo a la clasificación del razonamiento proporcional propuesto por Modestou & Gagatsis (2009) en nuestro contexto educativo solo se ha privilegiado la habilidad de resolver problemas lineales (proporcionalidad), generando alumnos incapaces de planificar las estrategias que han de usar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar fallos, argumentarlo y como consecuencia transferir todos ello a una nueva situación” (Ramírez e Hipólito Hernández, 2017,17)

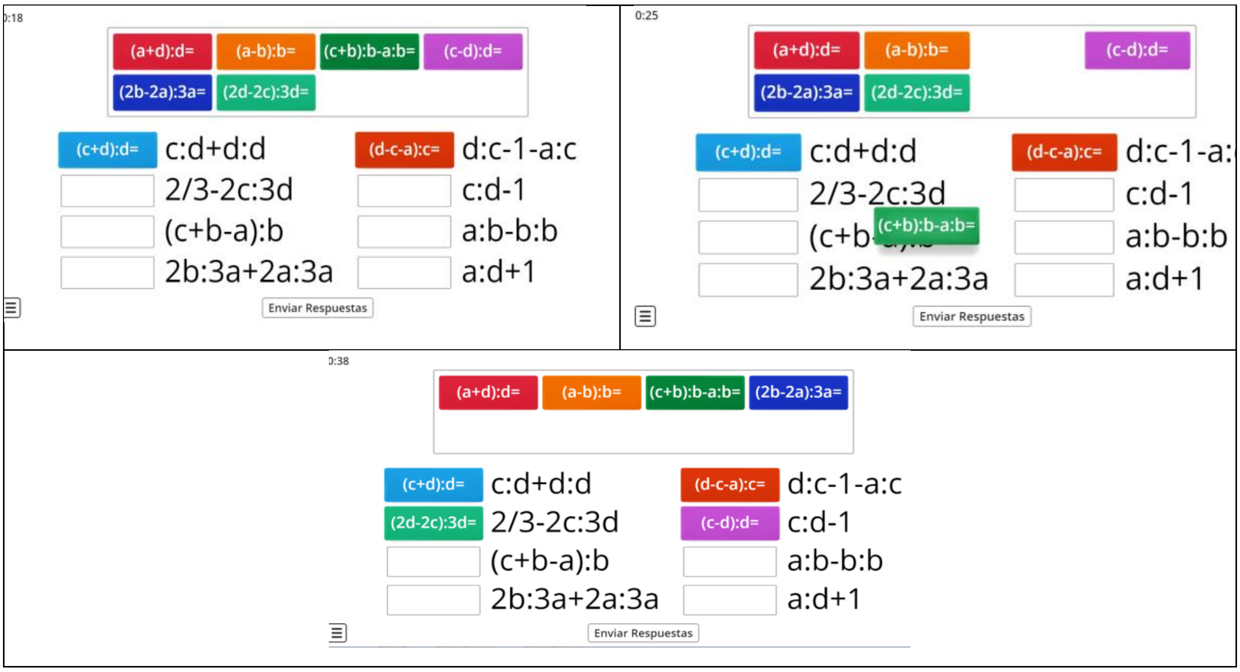
**Los recursos tecnológicos en la práctica educativa virtual**

Para desarrollar la propuesta utilizo varios recursos tecnológicos, entre ellos uno de los utilizados es genial.ly con el que realizo mi presentación ya que, entre otras alternativas, permite vincular con otras páginas y diferentes herramientas que utilizo. Para llevar adelante la clase, todo el equipo del TIM utiliza un canal de Youtube donde, además de quedar la grabación de las clases, se realiza una transmisión en vivo de las mismas.



Otro de los recursos utilizados es Quizziz, una plataforma web que permite crear actividades de preguntas y respuestas online para que las/os alumnas/os puedan, más informalmente, ir teniendo elementos de control de cuestiones conceptuales trabajadas.


Además, utilizo un juego de unir con flechas para trabajar con la propiedad distributiva de la división con respecto a la suma algebraica, ya que hemos identificado que implica muchas complejidades con los/as estudiantes, entonces también me resulta importante poder utilizarla en forma de juego para poder ejercitarla. Esta actividad lúdica la elaboré previamente en la aplicación Wordwall.




A este mismo recurso lo utilizo para mostrar ejemplos de proporcionalidad directa e inversa a través de un juego de cartas, en donde algunos de los ejemplos escritos en ellas, son erróneos y aprovecho la oportunidad de justificar el porqué de cada una de ellas. Link de acceso al juego: [https://wordwall.net/es/resource/7727215/proporcionalidad](https://wordwall.net/es/resource/7727215/proporcionalidad)

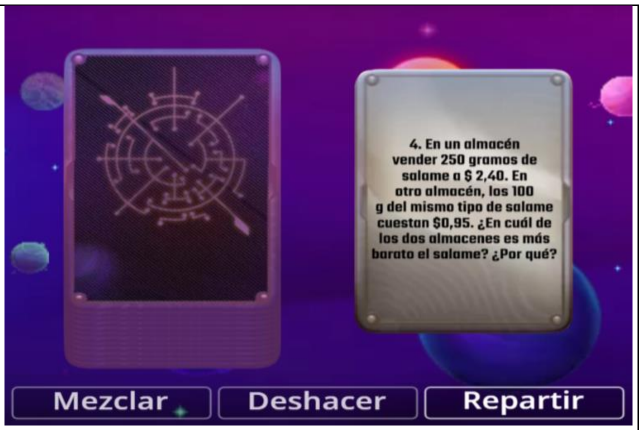
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Problemas muy frecuentes en los libros de texto vinculados a la construcción de edificios, casas, paredes, que NO son casos de proporcionalidad inversa.</td>
</tr>
<tr>
<td>

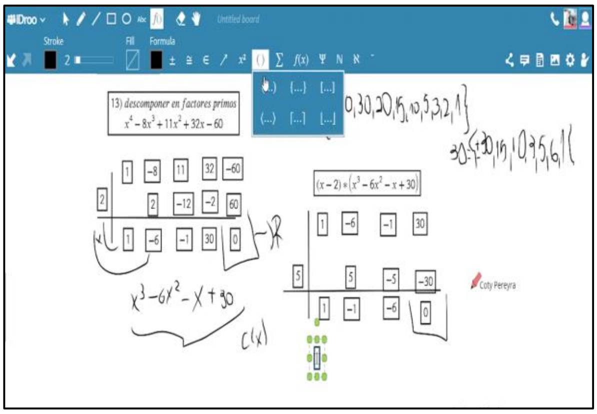

</td>
<td>Una idea análoga, para la (NO) proporcionalidad directa, aplicada en el contexto de la cantidad de dientes de un niño.</td>
</tr>
</table>

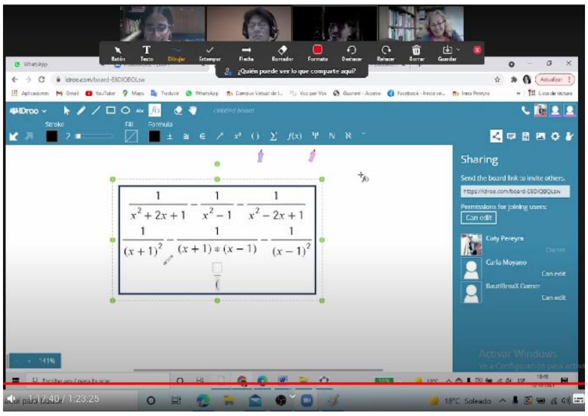
| | |
|---|---|
|  | Una situación interesante para debatir qué significa “proporcionalmente”. |

O muchas otras situaciones interesantes para debatir ideas de proporcionalidad:

| | |
|---|---|
|  |  |

En las clases prácticas del TIM utilizo las pizarras de Meet como Jamboard o la pizarra Idroo, para llevar adelante el desarrollo de los ejercicios propuestos. Las capturas de pantalla siguientes corresponden a clases prácticas en donde hacemos uso con las/os alumnas/os de la pizarra Idroo para resolver situaciones:



## Reflexiones finales

Tal como he señalado en este trabajo, la educación matemática nos permite siempre interesantes procesos de reflexión y transformación. Cada vez aumenta más el número de personas vinculadas con las matemáticas que se preocupan por muchos aspectos del aprendizaje y de la enseñanza de esta disciplina. Sin embargo, puedo analizar desde esta práctica de aula – también en una experiencia virtual–, que a pesar de la variedad de ideas teóricas, aún estamos sujetos a metodologías y principios tradicionalmente discutidos por la didáctica crítica. En mi caso particular, con la revisita a muchos conceptos y la búsqueda de información previa a las decisiones de la propuesta de aula, me especialicé en diversos temas de los cuales en muchas ocasiones tenía una idea errónea o desconocida. Por otra parte, los recursos tecnológicos me permitieron poder crear presentaciones, juegos, y material de enseñanza para poder mostrar e interactuar con los/as estudiantes. Considero que sin ello no podría haber sido posible el desarrollo del taller y me hace reflexionar que la tarea docente nos demanda estar buscando siempre nuevas oportunidades para la mejor comprensión de los conceptos, aun los que creemos muy básicos, ya que todos tienen una complejidad que necesitamos seguir estudiando.

## Referencias bibliográficas

Gastaminza M. L. (1970). *Nociones de Álgebra*. Bahía Blanca, Argentina: Universidad Nacional del Sur.

Gentile Enzo R. (1984). *Notas de Álgebra I*. Buenos Aires: Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Iriarte, M. D.; Jimeno Pérez, M. y Vargas, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA*, 7, 13-18.

López González, W. O. (2013). El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa. *Educere*, 17(56), 139-144.

Lícia de Souza, M., Câmara dos Santos, M. y Câmara de Sousa, P. R. (1991). Repensando a aprendizagem de frações: uma experiência pedagógica. Recife-Brasil: SPEC/PADCT/CAPES/MEC.

Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Pedagogía* [online]. 24 (70), 181-272.

Pluvinage, F. y Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los enteros. *Bolema*. Rio Claro, Brasil, 30 (54), 120-141.

Pochulu, M. D., [et al.] (2018). *Relatos de investigación y experiencias docentes III en Educación Matemática*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Ramírez C., Hipólito Hernández, P. (2017). Dificultades de la noción de la proporcionalidad en el tránsito del nivel primario al secundario. Revista *Pakbal*, 39, 12-18.

Castro Puche, R. y R. Castro Puche (2011). *Didáctica de las Matemáticas. De preescolar a secundaria*. Bogotá: Ecoe Ediciones.

Uzcátegui Aylwin, C. (2011). *Lógica, conjuntos y números*. Mérida, Venezuela: Gráficas El Portatítulo.