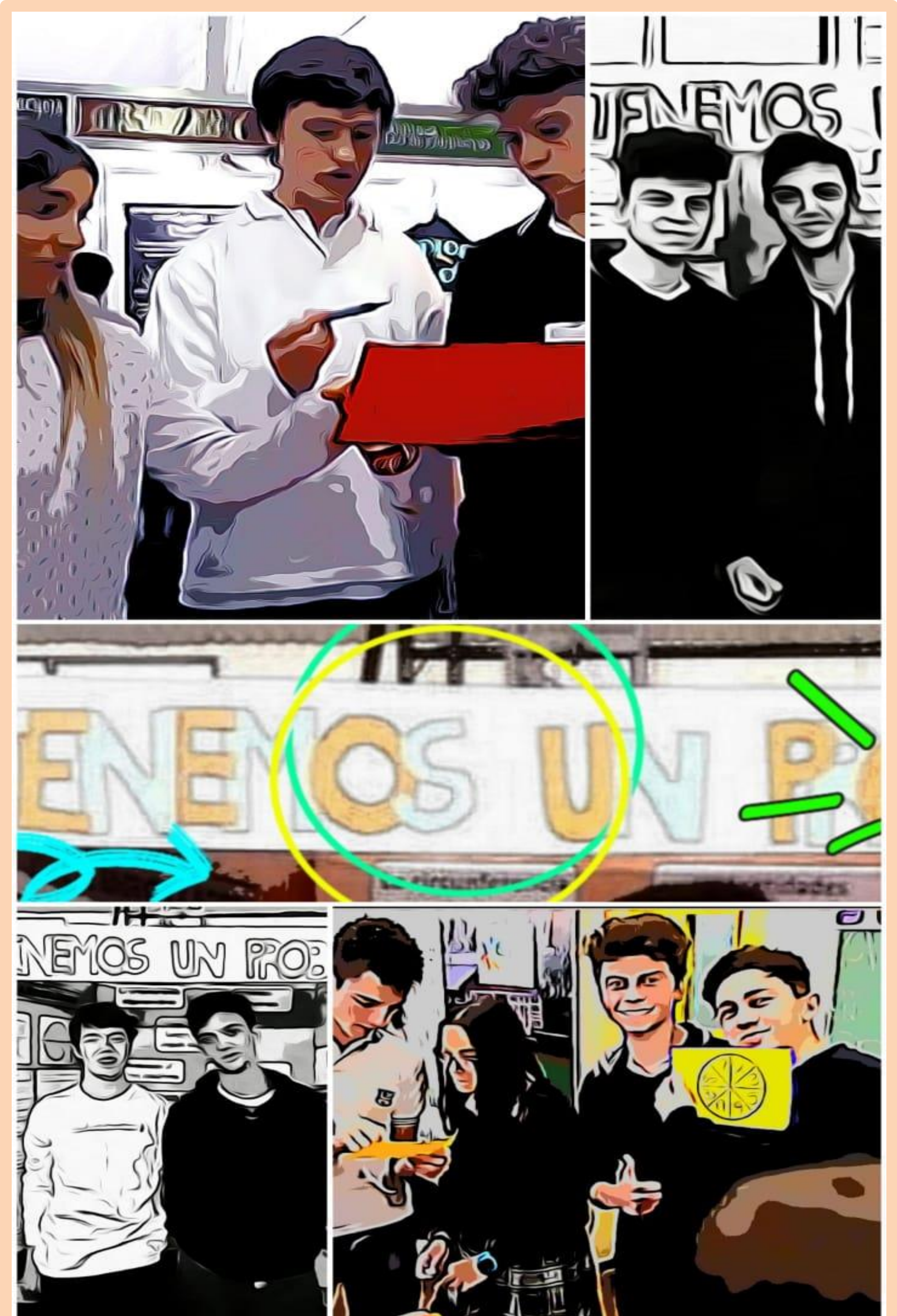


Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Wiliams Noel Uribe

wiliams_uribe@hotmail.com

Tenemos un problema

Campo de Prácticas, Año 2, Nº 1, octubre 2022

Sección: Artículos, pp. 28-54

ISSN 2118-8787

Tenemos un problema

Resumen

La propuesta está basada en el trabajo de aula con estudiantes de 6° año de la Educación Secundaria Obligatoria, en el espacio curricular de Matemática. Se trabaja como núcleo de conceptualizaciones la modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones trigonométricas y ecuaciones asociadas a ellas. Uno de los objetivos que orienta la tarea se centra en que los alumnos puedan fundamentar y justificar la utilización oportuna de conceptualizaciones trigonométricas como modo de dar cuenta de su apropiación y, por otro lado, operar y transferir a nuevos contextos las relaciones construidas. El problema alrededor del cual gira toda la secuencia -determinar a partir de qué n∈N la distancia entre un término de la sucesión y su límite se mantiene siempre menor que un ε-, representa una síntesis y un caso de situaciones para las cuales las construcciones trigonométricas trabajadas previamente se pudieron disponer como una potente estrategia de solución.

Palabras clave: prácticas educativas en aulas de 6to año de la Educación Secundaria, matemática, trigonometría, propuesta basadas en problemas

We have a problem

Abstract

The proposal is based on classroom work with students in the 6th year of Secondary Education, in the curricular space of Mathematics. The core of conceptualizations is the modeling of situations that promote the interpretation, analysis and use of trigonometric functions and equations associated to them. One of the objectives guiding the task is focused on students being able to justify the appropriate use of trigonometric conceptualizations as a way to account for their appropriation and, on the other hand, to operate and transfer the relationships built to new contexts. The problem around which the whole sequence revolves -to determine from which n∈N the distance between a term of the sequence and its limit remains always less than

an ε-, represents a synthesis and a case of situations for which the trigonometric constructions previously worked on could be available as a powerful solution strategy.

Keywords: educational practices in 6th grade secondary education classrooms, mathematics, trigonometry, problem-based proposal

El problema

Es importante comenzar la descripción del trabajo con algunas caracterizaciones del contexto. El colegio en que se lleva adelante la experiencia es una institución de gestión privada de educación secundaria de la Provincia de La Pampa, que fomenta el desarrollo de actividades relacionadas con la ciencia y la investigación escolar y esto significa una contribución en la modalidad de trabajo docente que -a partir de preguntas e inquietudes que surgen del grupo clase- va orientando la posibilidad de relacionarse con los contenidos de la materia a partir de problemas, de forma integrada, habilitando una práctica en la que se van entretejiendo los marcos teóricos y los procedimientos específicos de la disciplina, en este caso, la Matemática.

La secuencia comienza en momentos en que, en el trabajo del grupo de estudiantes, el objeto de estudio eran las Sucesiones; se había considerado la $a_n = \left|\frac{sen\ (n)}{n}\right|$ y al darle valores grandes a n se estimó (numéricamente) que $\lim_{n\to\infty} \frac{sen\ (n)}{n} = 0$. Teníamos que determinar a partir de qué $n \in N$ la distancia entre un término de la sucesión y su límite comienza a mantenerse siempre menor que un $\varepsilon = 0.1$, surge la necesidad de poder resolver la siguiente inecuación:

$$\left|\frac{sen\ (n)}{n}\right| < 0.1$$

cuya resolución se constituye en el problema que da origen a toda la propuesta.

En esa instancia se determinó de manera gráfica que a partir del noveno término de la sucesión se verificaba la desigualdad.

* Bruno, en Geogebra, graficó las funciones $y = \frac{sen\ (n)}{n}$, $y = 0.1$ e $y = -0.1$ y pudo determinar gráficamente que la solución de esta inecuación era $n \geq 9, n \in N$.

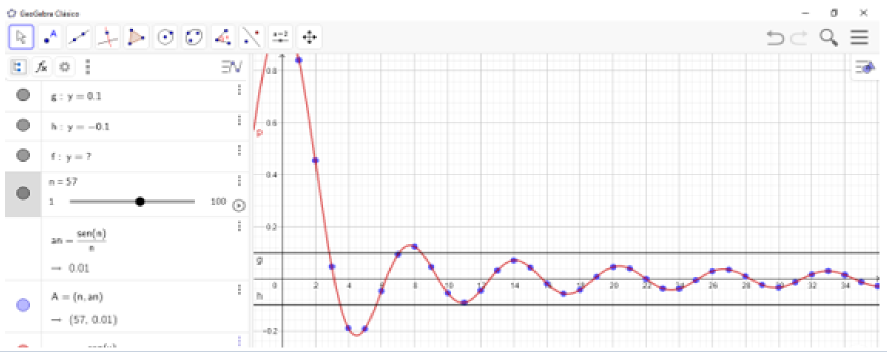


Imagen 1. Solución de un alumno, Bruno, recuperada de sus producciones.

La manera de determinarlo fue gráfica y utilizando dos estrategias diferentes:

*Lucio, pensó que la inecuación $\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right| < 0.1$ se podía transformar en $|\operatorname{sen} n| < 0.1n$ ya que $n \in N$ y $|n| = n$. En Geogebra, graficó las rectas $y = 0.1n, y = -0.1n$ y la función $y = \operatorname{sen} n$. Gráficamente pudo determinar gráficamente que a partir de $n \geq 9, n \in N$ se verifica que $-0.1n < sen\ (n) < 0.1n$.

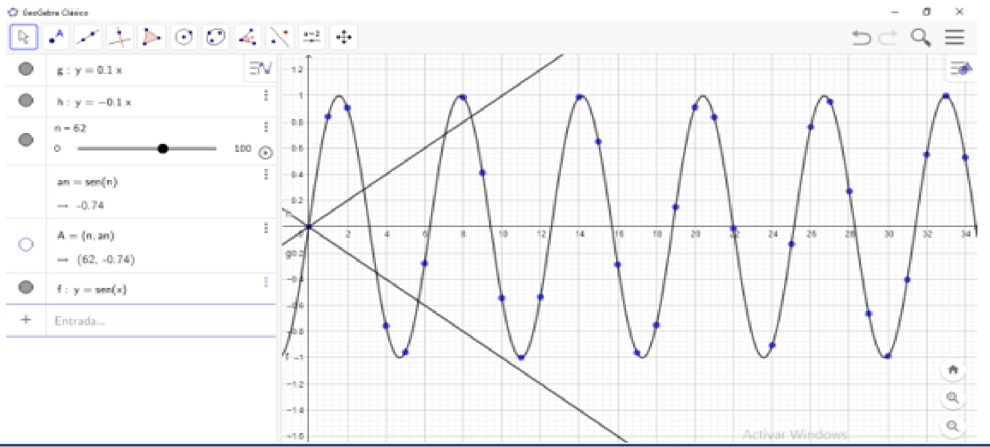


Imagen 2. Solución de un alumno, Lucio, recuperada de sus producciones.

En ese proceso comenté a las/os alumnas/os que Geogebra utiliza en esos gráficos el sistema circular, cuya unidad de medida es el radián y les expliqué la relación con el sistema sexagesimal. Por cuestiones del tiempo escolar, nos propusimos comenzar el próximo año con una secuencia que nos permita entender el comportamiento de la sucesión y algunas estrategias para poder resolver la inecuación, y también quedaron pendientes otras cuestiones vinculadas al análisis de relaciones trigonométricas de cualquier tipo de ángulo, acudiendo a la circunferencia trigonométrica.

Así, el relato y el estudio está basado en la práctica de aula con estudiantes de 6° año de la Educación Secundaria Obligatoria, en el espacio curricular de Matemática.

En este año curricular las/os estudiantes tienen una carga horaria de 3 clases de Matemática y 2 clases destinadas a un Taller Pre-Universitario de Matemática, cada clase de 40 minutos. Durante los meses de marzo, abril y mayo se utilizaron los dos espacios para el desarrollo de la propuesta.

Los saberes seleccionados están enmarcados en los ejes que el Ministerio de Educación de la provincia de La Pampa propone como: *En relación con las funciones y el álgebra (de 6to año) y En relación con la geometría y el álgebra (de 5to año).*

Dentro de los ejes citados, se configura como núcleos de conceptualizaciones:

1. *La modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones trigonométricas y ecuaciones asociadas a ellas.*

Esto supone:

. Modelizar situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones trigonométricas usando las nociones de dependencia y variabilidad, y seleccionando la representación (tablas, fórmulas, gráficas con recursos tecnológicos) adecuada a la situación.
. Interpretar las funciones trigonométricas seno y coseno; expresadas mediante fórmulas y gráficos cartesianos, extendiendo al marco funcional las relaciones trigonométricas estudiadas.
2. *Reconocer y explorar relaciones trigonométricas en ángulos y triángulos.*
Esto supone:
. Analizar las relaciones trigonométricas de cualquier tipo de ángulo, acudiendo a la circunferencia trigonométrica.

Los objetivos para trabajar en los ejes citados se centran en que las/os alumnas/os puedan:
. Fundamentar y justificar la utilización oportuna de conceptualizaciones trigonométricas como modo de dar cuenta de su apropiación (en la ampliación de las relaciones trigonométricas de cualquier tipo de ángulo, acudiendo a la circunferencia trigonométrica, los sistemas de medición, las relaciones entre las razones trigonométricas, la construcción de las funciones a partir de sus registros de representación numéricos, algebraicos y gráficos)
. Operar y transferir a nuevos contextos las relaciones construidas (calcular el valor de razones trigonométricas para cualquier tipo de ángulo, obtener una razón a partir de otra dada, realizar conversiones entre grados y radianes; reducir las relaciones de cualquier ángulo a las de uno agudo; resolver ecuaciones trigonométricas sencillas)
. Resolver problemas para los cuales las construcciones trigonométricas trabajadas resultan una potente estrategia de solución.
Al finalizar esta propuesta, se espera que los alumnos puedan modelizar situaciones a partir de funciones trigonométricas (en particular el seno y coseno) y utilizar esos modelos para resolver situaciones problemáticas. Para ello se pretende que puedan interpretar las funciones articulando los diferentes registros de representación, que extiendan las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo a partir de la circunferencia goniométrica y que puedan resolver ecuaciones para dar respuesta a los diferentes problemas planteados.
Las/os alumnos están familiarizadas/os con la noción de función y manejan su terminología básica. Con soltura interpretan funciones dadas mediante su tabla o gráfica y representan gráficamente funciones descriptas por un enunciado -domino, imagen, intersecciones con los ejes, conjunto de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y/o decrecimiento-. Establecen relaciones entre la gráfica de algunas funciones y su expresión da de manera

analítica o como una tabla de valores. Básicamente pueden expresar una misma situación utilizando distintas formas de representación -gráfico, fórmula, tabla, descripción verbal-. En 3° y 4° año se caracterizaron las relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente utilizando la proporcionalidad entre segmentos que son lados en triángulos rectángulos. Hasta ahora solo se ha trabajado trigonométricamente con ángulos agudos. Además, de la forma en que se han definido las razones trigonométricas de un ángulo agudo no es generalizable a otros tipos de ángulos. La ampliación forma parte de esta propuesta

La secuencia

La secuencia en sí misma configura el sentido de este trabajo, una organización que necesitó desarrollarse para luego poder tener su escritura definitiva, un problema que es de esas/os estudiantes no sólo por lo particular, sino por lo propio y generado en el grupo, y que invita a pensar en una lógica de recorrido del contenido a partir de necesidades, que va mostrando cómo quedaron entretejidas las categorías teóricas, cómo es la práctica la que inicia y demanda y tracciona las mismas conceptualizaciones, cómo quedan entramadas las evaluaciones, en qué momentos, en este grupo, con este docente y con esta dinámica se habilitan más caminos, y qué profundo puede resultar el trabajo alrededor de un problema.

La secuencia de tareas queda organizada en 9 tramos, en cada uno de ellos se proponen tareas con las que se busca contribuir al logro de cada uno de los objetivos propuestos. El siguiente esquema muestra el tiempo destinado para la implementación de cada uno de los tramos de la secuencia:

TRAMO	Tiempo destinado
Tramo A: El problema de la enrolladora	5 clases
Tramo B: El valor de w y las coordenadas del punto P	6 clases
Tramo C: Relación entre la longitud de w y el ángulo α	3 clases
Trabajo practico de profundización: Relación entre tramos	2 clases
Evaluación escrita	2 clases
Tramo D: Identidades Trigonométricas	4 clases
Tramo E: Ecuaciones trigonométricas	3 clases
Evaluación escrita	2 clases
Tramo F: Construcción de las funciones seno y coseno	4 clases
Tramo G: Variación de las funciones seno y coseno a partir de la modificación de sus parámetros.	6 clases
Tramo H: Modelizar situaciones	3 clases
Tramo I: Tenemos un problema	3 clases

Tramo A: El Problema de la enrolladora

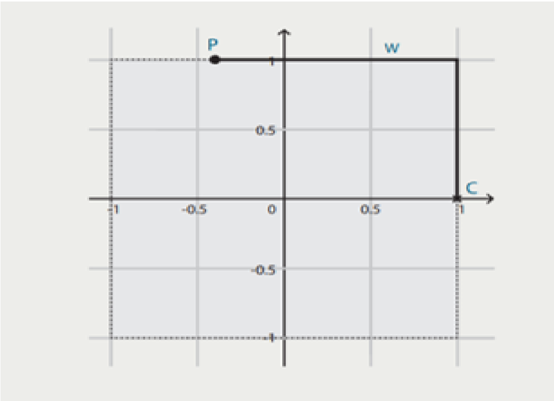
Se comienza con "El problema de la enrolladora", actividades que fueron recuperadas de un Ateneo de Matemática sobre Modelización de funciones periódicas de Nuestra Escuela dictado en el 2018. En el documento correspondiente al ateneo se puede leer que la secuencia fue diseñada sobre la base de distintas producciones de materiales para el aula. En una primera instancia, en el año 2009, se confeccionaron guías de problemas para la materia Matemática I anual en la Universidad Nacional de General Sarmiento. Durante el año 2016 se usó ese material como base para producir una unidad de la guía de problemas de la materia Introducción al Cálculo en la Universidad Nacional de Moreno.

Para el primer tramo de la secuencia el propósito es que se expliciten tanto los conocimientos previos que pueden tener disponibles las/os alumnas/os como los conocimientos a los que se quiere llegar, diferenciándolos y poniéndolos en relación.

Primera Parte

Establecer una relación entre una longitud de hilo w y una posición P en el plano cartesiano.

Se tiene un cuadrado centrado en el origen de coordenadas, cuyos lados miden 2 unidades. A partir del punto C= (1; 0), en sentido antihorario, se desplaza el punto P sobre los lados del cuadrado, como si se enrollara un hilo de longitud w alrededor del cuadrado.



1. Determiná las coordenadas del punto P si la longitud w "del hilo" fuera:

i) $w=1$	ii) $w=3$	iii) $w=5$	iv) $w=8$	v) $w=1,7$	vi) $w=6,3$
vii) $w=7,5$	viii) $w=16$	ix) $w=40$	x) $w=17$	xi) $w=82,5$	

2. Hallá las coordenadas del punto P si la longitud "del hilo" fuera w=6,5. Halla cuatro valores distintos de w para los cuales las coordenadas del punto P sean las mismas.

3. ¿Es cierto que para w=3 y para w=11 las coordenadas del punto P son las mismas? ¿Y para w=35? ¿Y para w=42?

4. Si a es un número real y k un número natural, ¿es cierto que para w=a y para $w = a + 8{\cdot}k$ las coordenadas del punto P son las mismas?

Segunda Parte

Analizar en términos de función: dominio, imagen, raíces, crecimiento y decrecimiento. Registros de tablas y gráficos.

1. La función f(w) asigna a una longitud "del hilo" w el valor de la primera coordenada del punto P. Completa la siguiente tabla:

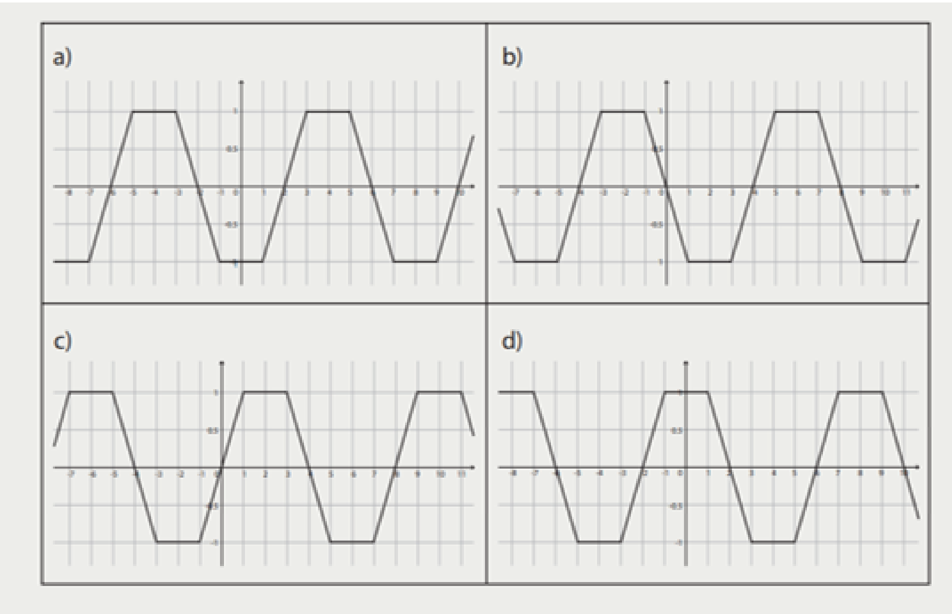
w	*f(w)*
0	
2	
2,4	
3	
3,5	
5	
6,6	

. Considerando que si el valor de w es negativo el "hilo" se enrolla en el otro sentido (es decir, en sentido horario), ¿cuál es el valor de f(-1)?

. ¿Es cierto que el dominio de f son todos los números reales?

. ¿Cuál es la imagen de f? e. Determiná el conjunto de ceros de f.

. ¿Cuál de los siguientes gráficos podría ser el gráfico de la función f?



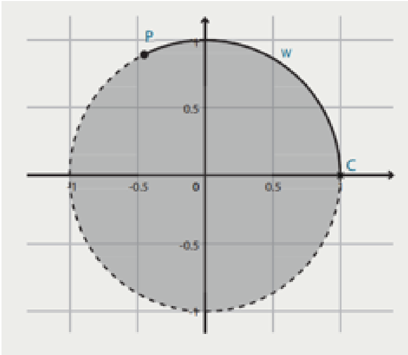
2. Sea k un número entero, ¿Es cierto que f(3+8k)=f(3)? ¿Y qué f(w+8k)=f(w), donde w representa un número real cualquiera?

3. Tarea complementaria: Considera una función g que a cada longitud "del hilo" (variable independiente) le asigne el valor de la segunda coordenada del punto P (variable dependiente) y responde las preguntas de la segunda parte para la función g.

Tercera Parte

Transferencia a otro esquema, la circunferencia, estableciendo analogías con la situación anterior.

La siguiente es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, cuyo radio mide 1 unidad. A partir del punto C= (1; 0), se desplaza el punto P sobre la circunferencia en sentido antihorario, como si se enrollara un hilo de longitud w alrededor de la circunferencia.



1. ¿Cuánto debe medir "un hilo" para que pueda dar exactamente 1 vuelta a la circunferencia?
2. Determiná las coordenadas de P si la longitud w "del hilo" fuera:

i) $w=2\pi$ ii) $w=\pi$ iii) $w=7\pi$ iv) $w=\frac{1}{2}\pi$ v) $w=\frac{3}{2}\pi$ vi) $w=\frac{5}{2}\pi$ vii) $w=\frac{21}{2}\pi$

3. Sabiendo que $P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ cuando $w=\frac{1}{6}\pi$, determina las coordenadas de P si la longitud w fuera:

i) $w=\frac{5}{6}\pi$	ii) $w=\frac{11}{6}\pi$	iii) $w=\frac{13}{6}\pi$	iv) $w=\frac{17}{6}\pi$	v) $w=\frac{7}{6}\pi$

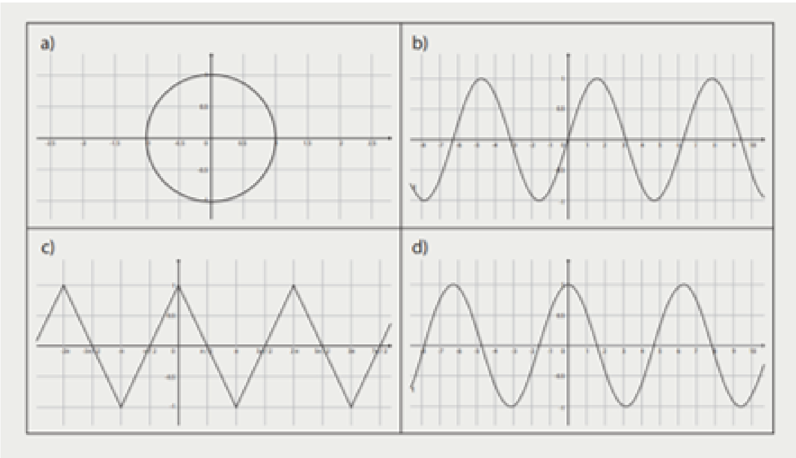
Cuarta Parte

1. La función f asigna a una longitud "del hilo" w el valor de la primera coordenada del punto P, que llamamos f(w).
Completá la siguiente tabla:

w	$f(w)$
0	
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2}\pi$	
$\frac{3}{4}\pi$	
$\frac{5}{4}\pi$	
$\frac{3}{2}\pi$	
$\frac{7}{4}\pi$	
2π	

- Considerando que si el valor de w es negativo el "hilo" se enrolla en el otro sentido (es decir, en sentido horario), ¿cuál es el valor de $f(-\frac{1}{4}\pi)$?
- ¿Es cierto que el dominio de f son todos los números reales?
- ¿Cuál es la imagen de f?
- Determina el conjunto de ceros de f.
- Halla los valores de w ∈ $[0;2\pi]$ para los cuales la función es positiva y los valores para los cuales la función es negativa.
- ¿Cuál de los siguientes gráficos podría ser el gráfico de la función f?



Como parte de las consignas se propuso completar tablas con el objetivo de que los estudiantes comprendan cómo está definida cada función (f y g, tanto para el cuadrado como para la circunferencia). Además, tuvieron que poner en juego sus conocimientos sobre funciones (dominio, imagen, conjunto de ceros, escrituras específicas, etc.) en la situación planteada. Es importante destacar que, aunque no fue inmediato, los estudiantes pudieron reconocer la existencia de una función, aunque no se emplee una fórmula para definirla.

Estas tablas y el análisis realizado para cada función, permitieron que los alumnos pusieran en relación las distintas partes de los gráficos con algunas características de la situación que define la función (el punto P recorriendo el cuadrado o la circunferencia). Por ejemplo, en el caso del cuadrado, podían identificar que cada uno de los tramos horizontales de los gráficos se corresponde con valores de w para los cuales el valor de la primera coordenada del punto P se mantiene constante. Es decir, a longitudes "del hilo" para las cuales el punto P no se mueve horizontalmente. También llegaron a la conclusión de que cada uno de los tramos en donde los gráficos "suben" y "bajan" se corresponde con valores de w para los cuales el punto P se desplaza por los lados horizontales del cuadrado, ya que en esos casos el valor de su primera coordenada varía.

La definición en el círculo unitario permitió extender el dominio de seno y coseno a todos los números reales. Se evaluó la tangente a partir de su relación estas dos razones.

Tramo B: El valor de w y las coordenadas del punto P

Primera Parte

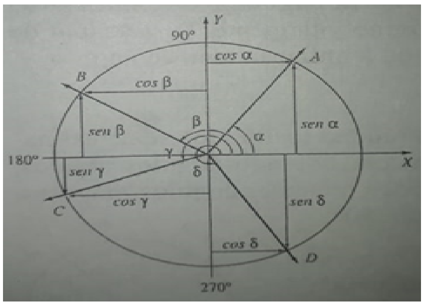
Del dialogo y la construcción colectiva recuperamos:

1. **La circunferencia trigonométrica:**

Dado un valor positivo w, se recorre la longitud w sobre una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, en sentido antihorario, comenzando en el punto (1; 0). Al finalizar el recorrido se obtiene un punto P sobre la circunferencia, cuyas coordenadas dependen del valor w. Si el valor de w es negativo, se recorre el valor absoluto de w sobre la misma circunferencia y comenzando desde el mismo punto, pero en sentido horario. Al igual que en el caso anterior, se obtiene un punto P sobre la circunferencia, cuyas coordenadas dependen del valor de w. A la circunferencia utilizada, que tiene radio 1 y está centrada en el origen, se la llama circunferencia trigonométrica. En conclusión, dado un valor $w \in \mathbb{R}$ queda determinado un único punto (w) sobre la circunferencia trigonométrica.

2. **Seno y coseno de un ángulo cualquiera**

Se construye en el pizarrón el siguiente esquema que permite la generalización de la trigonometría del ángulo agudo a ángulos de todos los cuadrantes.



El ángulo α corta a la circunferencia unidad en A, $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ son las coordenadas del punto A respecto a los ejes cartesianos X, Y. Ambas coordenadas son positivas.

- Análogamente $(\cos\beta;\ \operatorname{sen}\beta)$ son las coordenadas el punto B, situado en el segundo cuadrante. En este caso $\cos\beta$ es negativo.

Para los otros ángulos se dan los siguientes signos:

- En el tercer cuadrante $\operatorname{sen}\gamma < 0,\ \cos\gamma < 0$
- En el cuarto cuadrante $\operatorname{sen}\delta < 0, \cos\delta > 0$

La relación fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, evidentemente, se sigue cumpliendo para cualquier valor de α.

Observaciones:

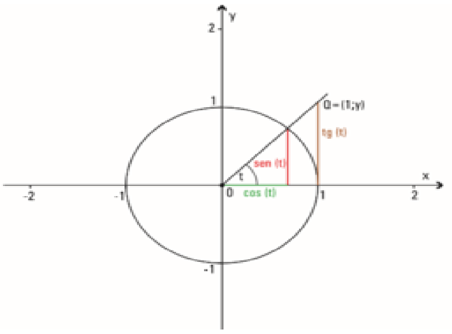
• Como la circunferencia completa (ángulo de un giro) mide 360°, si $\alpha > 360°$ representará un ángulo de más de un giro.

• En forma similar, α es negativo, el ángulo que se asocia al mismo será un ángulo cuyo lado final se obtiene realizando una rotación en sentido horario desde el semieje x positivo que representa el lado inicial.

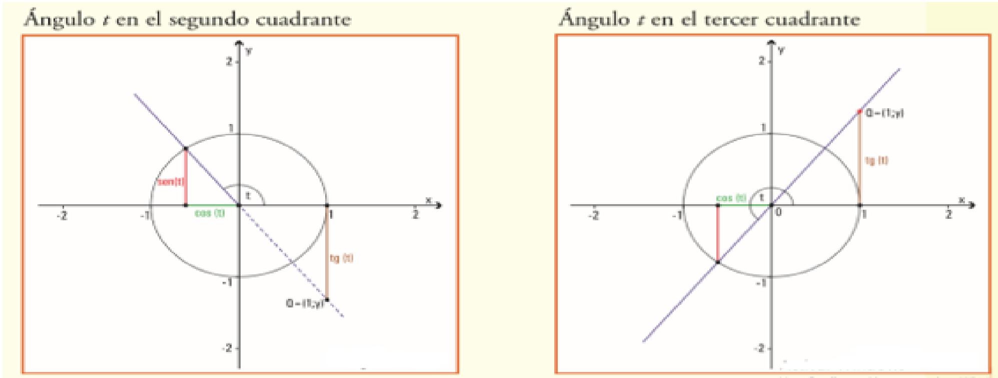
3. Tangente de un ángulo cualquiera

Por definición el valor de la tg α corresponde siempre a la ordenada de un punto cuya abscisa es x= 1.

Del siguiente esquema también se puede establecer la relación $tg\ t = \frac{sen\ t}{cos\ t}$



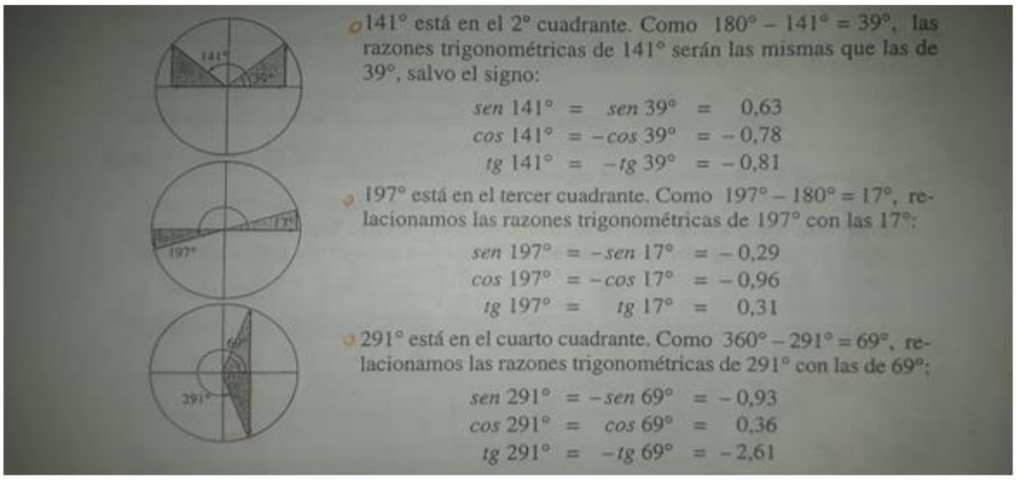
Entonces, si el ángulo α pertenece al segundo o tercer cuadrante, para representar geométricamente la tangente debemos prolongar el lado final de dicho ángulo.



4. Reducción al primer cuadrante

Hace unos años, cuando no había calculadoras o no eran, todavía, instrumentos de uso corriente, se incluían en los libros unas tablas en las que aparecían las razones trigonométricas de los ángulos, de grado en grado. Estas tablas, sin embargo, acababan en el ángulo de 90°. ¿Por qué? Porque conociendo las razones trigonométricas de estos ángulos se obtienen las de cualquier otro que este correspondido entre 90° y 360°.

Aunque ahora, con las calculadoras, podemos obtener directamente las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, vamos a proceder como si sólo conociéramos las razones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90° y, a partir de ellas, calculáramos las restantes. Veamos algunos ejemplos (ángulos suplementarios, opuestos, que difieren en 180°):



141° está en el 2° cuadrante. Como 180° – 141° = 39°, las razones trigonométricas de 141° serán las mismas que las de 39°, salvo el signo:

$$sen\ 141° = sen\ 39° = 0{,}63$$
$$cos\ 141° = -cos\ 39° = -0{,}78$$
$$tg\ 141° = -tg\ 39° = -0{,}81$$

197° está en el tercer cuadrante. Como 197° – 180° = 17°, relacionamos las razones trigonométricas de 197° con las 17°:

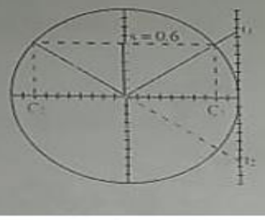
$$sen\ 197° = -sen\ 17° = -0{,}29$$
$$cos\ 197° = -cos\ 17° = -0{,}96$$
$$tg\ 197° = tg\ 17° = 0{,}31$$

291° está en el cuarto cuadrante. Como 360° – 291° = 69°, relacionamos las razones trigonométricas de 291° con las de 69°:

$$sen\ 291° = -sen\ 69° = -0{,}93$$
$$cos\ 291° = cos\ 69° = 0{,}36$$
$$tg\ 291° = -tg\ 69° = -2{,}61$$

5. **Cálculo de las demás razones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas.** Se procede del mismo modo que como se hizo con los ángulos agudos, con la diferencia que ahora tienen sentido tanto las soluciones positivas como las negativas. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Calcular las demás razones trigonométricas de α sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}6$



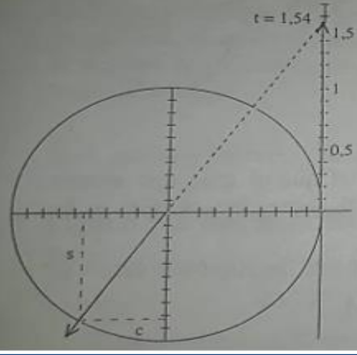
$$0{,}6^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1, \quad (cos\ \alpha)^2 = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36$$

$$cos\ \alpha = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$$

$$\begin{cases} \text{si } cos\ \alpha = 0{,}8 \ , \ tg\ \alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75 \\ \text{si } cos\ \alpha = -0{,}8 \ , \ tg\ \alpha = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75 \end{cases}$$

Ejemplo 2. Sabiendo que $tg\ 237° = 1{,}54$ calcular $sen\ 237°$ y $cos\ 237°$.

Este caso difiere del anterior en que *sabemos dónde está el ángulo* y, por tanto, sabemos el signo de las razones trigonométricas que faltan:



$sen\ 237° = s, \quad cos\ 237° = c$

$$\left.\begin{matrix} s^2 + c^2 = 1 \\ \dfrac{s}{c} = 1{,}54 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} s = 1{,}54c \\ (1{,}54c)^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow \ 2{,}3716c^2 + c^2 = 1 \end{matrix}$$

$$3{,}3716\ c^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{3{,}3716} = 0{,}2966$$

$c = -\sqrt{0{,}2966} = -0{,}54$ Sólo tomamos la raíz negativa porque el ángulo 237° está en el 3er cuadrante.

$s = 1{,}54 \cdot (-0{,}54) = -0{,}83$

Por tanto, $sen\ 237° = -0{,}83$, $cos\ 237° = -0{,}54$

Segunda Parte

Consignas para estabilizar el conocimiento

1. ¿Qué ángulos del primer cuadrante de una circunferencia goniométrica son adecuados para calcular las razones de $a)\ 342° \quad b) 516° \quad c) 718° \quad d)\ 2373° \quad e)\ 4321°$?
2. Utiliza la calculadora para hallar el ángulo α en los siguientes casos:
   $a)\ sen\ \alpha = 0.87;\ \ 90° < \alpha < 180° \qquad b) \cos\alpha = -0.37;\ \ sen\ \alpha > 0$
   $c)\ tg\ \alpha = -3.5;\ \ sen\ \alpha > 0\ \ y\ 0° < \alpha < 360°$
3. Sabiendo que $tg\ \theta = \sqrt{3}$, calcula el resto de las razones trigonométricas.
4. Sabiendo que $\cos 136° = -0.72$, calcula el resto de las razones trigonométricas.
5. Sabiendo que $|sen\ \alpha| = 0.3$, calcula el resto de las razones trigonométricas de α si:

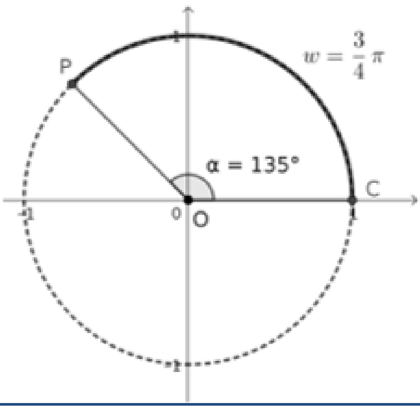
$a)\ 0° < \alpha < 90° \qquad b)\ 90° < \alpha < 180° \qquad c)\ 180° < \alpha < 270° \qquad d)\ 270° < \alpha < 360°$

6. Calcula en función de las razones trigonométricas de α, las razones trigonométricas de:
   $a)\ \ 180° - \alpha \qquad b) 180° + \alpha \qquad c) - \alpha$
7. Usando la calculadora averigua las razones trigonométricas de $\beta = 35°$. A partir de los resultados obtenidos, calcula:
   $a) \cos 145° \qquad b) tg\ 235° \qquad c)\ sen\ (-35°) \qquad d)\ tg\ 215°$
8. Determina un ángulo α, tal que $90° < \alpha < 360°$, en los tres casos siguientes:
   $a)\ sen\ \alpha = -sen\ 40° \qquad b) \cos\ \ \alpha = \cos\ \ 40° \qquad c)\ tg\ \alpha = -tg\ 40°$
9. Sabiendo que $sen\ 57° = 0.84$, calcula las razones trigonométricas de:
   $a)\ 33° \qquad b) 147° \qquad c)\ 237° \qquad d) 213° \qquad e) - 57°$
10. Hallar todos los ángulos que cumplan:
    a) $\cos\beta = 0.5 \qquad b)\ sen\ \alpha = -\dfrac{2}{3} \qquad c)\ tg\ \theta = -3.5$
11. Dibuja sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y calcula el valor de las restantes razones trigonométricas.
    $a)\ sen\ \alpha = -0.5 \quad y \quad tg\alpha > 0 \qquad b)\ tg\ \beta = -1\ \ y \cos\ \ \beta < 0$

Tramo C: Relación entre la longitud de w y el ángulo α

Primera Parte

La medida de un ángulo expresada en radianes es igual a la longitud del arco que comprende dicho ángulo en una circunferencia de radio 1, cuando su vértice es el centro de la circunferencia. Así, por ejemplo, la medida del ángulo del gráfico puede expresarse como 135° o como $\frac{3}{4}\pi$ radianes.



Segunda Parte

Consignas para estabilizar el conocimiento.

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos: $30°, 72°, 90°, 127°, 200°, 300°$. Expresa el resultado en función de π, y luego en forma decimal.
   Por ejemplo $30° = \frac{1}{6}\pi\ rad = 0.52\ rad$
2. Pasa a grados los siguientes ángulos:

   $2\ rad \qquad 0.83\ rad \qquad \frac{\pi}{5}\ rad \qquad \frac{5}{6}\pi\ rad \qquad 3.5\ rad \qquad 6\ rad$
3. Busca todos los ángulos, x, que verifiquen $sen(x) = 0.5$ ¿cuántos (y cuáles) de estos ángulos, hay entre $0\ y\ 2\pi\ radianes$? ¿Cuántos hay en total?
4. Del mismo modo que en el ejercicio anterior, busca todos los ángulos x que verifiquen $\cos(x) = -0.5$
5. El radio de una circunferencia mide 6 cm. ¿Cuál es la longitud de arco correspondiente a un ángulo de 1 radián? ¿y la correspondiente a arcos de 2 radianes, $\pi\ radianes\ y\ 20°$?
6. Dos ángulos de un triángulo miden 50° y $\frac{\pi}{6}rad$, respectivamente. ¿Cuánto mide el otro ángulo? (Da el resultado en grados y en radianes.)
7. Un ángulo de 1.5 radianes abarca un arco, centrado en su vértice, de 10 cm. ¿Cuánto medirá el radio con el que se ha trazado dicho arco?
8. Un ángulo está comprendido entre $\pi\ y\ \frac{3}{2}\pi\ radianes$. ¿Qué signo tiene su seno? ¿Y su coseno?

Tanto en el caso del cuadrado como en el de la circunferencia, al establecer una relación entre una longitud de hilo w y una posición P, surge la condición de periodicidad:

. En el caso del cuadrado, las coordenadas del punto P serán (1; 0) siempre que la longitud w del hilo que se enrolla sea múltiplo de 8. Por lo tanto, para determinar las coordenadas de P en los casos en que w sea mayor que 8 se podría enrollar el hilo dando vueltas completas y luego utilizar lo que sobra. Es decir, dividir la longitud w por 8 y analizar e interpretar el resto en el contexto del problema. Por ejemplo, para w=82,5 se pueden determinar las coordenadas del punto P considerando que 82,5=10·8+2,5. De esta manera se puede interpretar que al enrollar se dan 10 vueltas completas y sobran 2,5 unidades, siendo estas últimas las que se utilizan para calcular las coordenadas del punto P.

. En el caso de la circunferencia, si se enrolla una cierta longitud de w se obtienen unas determinadas coordenadas del punto P. Pero las coordenadas del punto P serán las mismas si se enrolla 2π más de longitud o si se desenrolla 2π de longitud. Es decir que las coordenadas del punto P se repiten cada 2π.

Las conclusiones a las que se arriban sobre la periodicidad en el cuadrado, tomando la vuelta completa de 8 unidades, permiten extender las relaciones a la circunferencia, con una vuelta completa de 2π unidades.

Charlamos con las/os estudiantes sobre los motivos por los cuales varios valores distintos de w pueden poseer la misma imagen al aplicar las funciones f o g -tanto en el caso del cuadrado como en el de la circunferencia-:

. uno es por razones de periodicidad.

Se trabajó sobre la interpretación de escrituras simbólicas que permiten representar las relaciones de periodicidad utilizando un lenguaje funcional apropiado. A partir de las relaciones estudiadas se puede interpretar la expresión f (3+8k)=f (3) como la imagen de 3 coincide con la imagen de 3 más cualquier múltiplo de 8.

. el otro motivo es la simetría.

Tanto el cuadrado como la circunferencia propuestas en los problemas son simétricas con respecto a ambos ejes cartesianos, por lo cual, cada punto de las figuras tendrá un simétrico con respecto al eje de abscisas y otro con respecto al eje de ordenadas. Las estrategias utilizadas en el caso del cuadrado se pudieron extender al caso de la circunferencia. Por ejemplo, en la circunferencia el simétrico para el valor de $w = \frac{1}{6}\pi$ es $\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi.$

Si se aplica la función g, por ejemplo, será:

$$g\left(\frac{1}{6}\pi\right) \underbrace{=}_{simetria} g\left(\frac{5}{6}\pi\right) \; y \;\; g(\frac{1}{6}\pi) \underbrace{=}_{periodicidad} g(\frac{1}{6}\pi + 2\pi)$$

Tercera Parte: relación entre tramos

Luego de introducir el nuevo sistema de medición angular y con lo construido hasta el momento, se propuso una guía de actividades con la intencionalidad de reforzar y afianzar los conceptos de los Tramos B y C. Se pueden observar tres núcleos de actividades.

NÚCLEO 1: en estas actividades deben utilizar las relaciones $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y y $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

NÚCLEO 2: con el objetivo de analizar cómo se relacionan las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, que difieren en 180°, ángulos opuestos.

NÚCLEO 3: para este núcleo de actividades se utilizan las funciones inversas $arcsen, arccos\ y\ arctan$. Se debe tener en cuenta el signo por cuadrante.

Estos núcleos orientaron la Evaluación.

Trabajo práctico de profundización.

Consignas:

1. Halla todos los ángulos, x, que cumplan que $sen\,(x) = 0.25$. Da la solución en radianes y grados. Sin utilizar la calculadora calcula $|\cos\,(x)|\ y\ |tg(x)|$.
2. Sabiendo que $sen\ 22° = 0.37$, y sin utilizar la calculadora, calcula demás razones trigonométricas. Utilizá estos resultados para indicar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 68° y de 112°.
3. Sabemos que $sen(x)\ = \frac{2}{3}$. Calcula, sin hallar x, el valor de:

$$sen(\pi - x) \qquad \cos\,(\pi + x) \qquad sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad sen(-x) \qquad \cos\,(x + 4\pi)$$

4. Trazar la circunferencia unidad y un ángulo de $w\ radianes$ en el primer cuadrante. A partir del ángulo dibujado representar el ángulo $\left(\frac{3}{2}\pi - w\right) radianes$ y obtener las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para los dos ángulos representados.
5. Indiquen el valor del ángulo:
   1. $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ y\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
   2. $cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ y\ sen\beta < 0$
   3. $tg^2\theta = \frac{1}{3}\ y\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

EVALUACIÓN

1. ¿Qué ángulos del primer cuadrante de una circunferencia goniométrica son adecuados para calcular las razones trigonométricas de a) 718° b)2373° c)4321°? Dar la respuesta en radianes.
2. Sabiendo que $\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{5}$, sin averiguar θ, calcular el resto de las razones trigonométricas.
3. Obtener en función de las razones trigonométricas de $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, las razones trigonométricas de:

   a) el ángulo complementario de α b)$\frac{3}{2}\pi - \alpha$ c) 180°+α d) el opuesto de α
4. Usando la calculadora averigua las razones trigonométricas de $\beta = 35°$. A partir de los resultados obtenidos establece relaciones con

   a) cos 505° b) tg 595° c) sen (-35°) d) tg (-145°)
5. Hallar todos los ángulos, en radianes, que cumplan:

$$a)\ \cos\beta = 0.5 \quad 0 < \beta < 360° \qquad b)\ sen\ \alpha = -\frac{1}{3}\ y\ tg\ \alpha > 0$$

$$c) |tg\ \theta| = 3\ y\ \pi < \theta < 2\pi$$

Tramo D: Identidades Trigonométricas

Primera Parte

Al momento de abordar las identidades trigonométricas debieron utilizar las relaciones que se venían trabajando (sen^2 α+cos^2 α=1 y tan α =senα/cosα) y recuperar las definiciones de secante, cosecante y cotangente trabajadas en 3° y 4° año.

Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de ángulos.

Manteniendo un fuerte intercambio con los estudiantes sobre las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas, propiedades de la multiplicación, casos de factorización, suma y resta de expresiones fraccionarias, etc. se desarrollaron los siguientes ejemplos:

$a)\ 1 + tg^2\,x = sec^2 x$

$b)\ (sen\ x + 1)(senx - 1) = -cos^2 x$

$c)\ 1 + co\,tg^2\,x = cosec^2 x$

$d)\ cosec\ x\,.\,tg\ x = \sec x$

$e)\ (sen\ x + \cos x)^2 = 2\ tg\ x\,.\,cos^2 x + 1$

Luego se propusieron las siguientes **Consignas:**

1. Marquen con una cruz las expresiones que resulten una identidad trigonométrica.

$a)\ cos^2x = 1 - sen^2x$

$b) sen\ x + \cos x = tg\ x$

c) $tg\ x\ .\ cotg\ x = 1$

$d)\ sen\ x = 1 - cosec\ x$

e)$\cos x = (\sec x)^{-1}$

$f)(sen\ x + \cos x)^2 = 1$

2. Resuelvan las siguientes identidades

$$a)\ \frac{1}{sen\ x\ .\cos x} - \frac{\cos x}{sen\ x} = tg\ x$$

$$b)\ \frac{sen\ x + \cos x}{cosec\ x + \sec x} = \frac{sen\ x}{\sec x}$$

$$c)\ \frac{\sec x + tg\ x}{\cos x + cotg\ x} = \sec x\ .tg\ x$$

$$d)\ \frac{1}{\frac{1}{cos^2x}(1 - sen^2x)} + tg^2x = sec^2x$$

$$e)\ (sec^2x - 1)\ .\ cosec^2x\ .\ cotg\ x = \frac{1}{sen\ x\ .\cos x}$$

$$f)\ (sen\ x + cosx)^2 - tg\ x\ .\ cos^2x = 1 + sen\ x\ .\ cosx$$

Tramo E: Ecuaciones Trigonométricas

Primera Parte

Consignas:

1. Utiliza las tablas y relaciones construidas en el problema de la enrolladora (el caso de la circunferencia) para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $sen(w) = \frac{1}{2}$ b) $sen(w) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $cos(w) = -\frac{1}{2}$ d) $2 \cdot cos(w) = -1$ e) $sen(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $tan(x) = 1$ h) $cos(x) = sen(x)$ i) $2 \cdot sen(x) = 3$ j) $sen^2(x) = 1$

k) $sen^2(x) - cos^2(x) = 0$

Segunda Parte

Al igual que con las identidades trigonométricas, se mantiene un fuerte intercambio con los estudiantes para orientarlos en la resolución de las siguientes ecuaciones:

$a)\ sen\ \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$

$b) 2\ sen^2x - sen\ x = 1$

$c) 2\ cos^2x = 1$

Consignas:

Resuelvan las siguientes ecuaciones para $\boldsymbol{x \in [0; 2\pi)}$

$a)\ 2\ cos^2x + 3\ cosx + 1 = 0$

$b)\ sen^2x - 7\ sen\ x = 0$

$c)\ sen^2x + 3{,}5\ sen\ x = 2$

$d)\sqrt{3}cos^2x - 1{,}5cosx = 0$

EVALUACIÓN

1. Comprueba que son verdaderas las siguientes igualdades.

$a)\ (sen\ \alpha + \cos\alpha)^2 + (sen\ \alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

$b) tg\ \alpha + cotg\ \alpha = \sec\alpha\ .\ cosec\ \alpha$

c) $\sec\alpha\ (1 - cos^2\alpha) = tg\ \alpha\ .\ sen\ \alpha$

$d)\ sen\ \alpha\ .\cos\alpha\ (\ 1 - tg^2\alpha) = (\ cos^2\alpha - sen^2\alpha)\ .\ tg\ \alpha$

2. Hallar todos los ángulos en el intervalo [0; 360] que verifiquen:

$a)\ \cos x\ (\cos x + 5) = 2 + sen^2 x$

$b) 3\cos x = \sec x$

$c) 2\ sen^2 x + 3\cos x = 3$

$d)\ 3\ tg^2 x - tg\ x = 0$

Nota: a medida que fueron terminando se les propuso la siguiente actividad extra:

3. Resolver el siguiente sistema dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante.

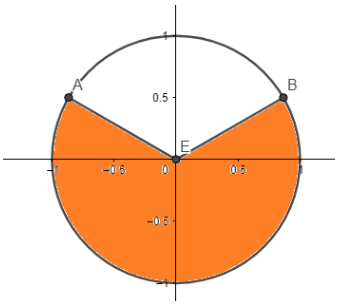
$$\begin{cases} sen^2 x + cos^2 y = 0.75 \\ cos^2 x - sen^2 y = 0.75 \end{cases}$$

En este Tramo E sobre ecuaciones trigonométricas, los alumnos pudieron resolver las primeras ecuaciones utilizando los valores de las tablas completadas en el problema de la enrolladora y analizando la simetría y la periodicidad en la circunferencia trigonométrica.

Por ejemplo, para la ecuación $sen(w) = 0.5$ los alumnos tenían el valor $\frac{\pi}{6}$ de w a partir de las tablas y luego el $\frac{5}{6}\pi$ por la simetría de la circunferencia. La intervención estuvo orientada a agregar todos los valores que surgen de la periodicidad y cómo expresar la solución. Es decir, todos los que surgen de seguir dando vueltas en la circunferencia. La solución quedaría expresada como

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\} \bigcup \left\{\frac{5}{6}\pi + 2\pi p, p \in Z\right\}$$

Uno de los estudiantes, fue más allá y estuvo pensando en cómo resolver la inecuación $sen(w) < 0.5$. Dijo que sería una manera de acercarnos a la inecuación que dio origen a todo el trabajo. En un papel realizó el esquema:



Y agregó: *“Primero pinté todo lo que corresponde al tercer y cuarto cuadrante porque ahí el seno es negativo, entonces seguro que* $sen(w) < 0.5$. *Después busqué para que ángulos se cumple que* $sen(w) = 0.5$. *Estos ángulos son 30° y 150°, por eso pinte todo lo que corresponde a ángulos del primer cuadrante menores que 30° y ángulos del segundo cuadrante mayores a 150°. Me faltaría ver cómo escribir todas las soluciones”*

Las demás ecuaciones fueron resultas con estrategias similares. Por ejemplo, la ecuación $sen^2(x) - cos^2(x) = 0$ se puede resolver interpretando que, para que el resultado sea 0, el valor absoluto del seno y del coseno deben ser iguales, ya que al elevarlos al cuadrado ambos serán positivos. Sobre la simetría de la circunferencia, en problemas anteriores se estudió que cuando el arco es la mitad de un cuarto de circunferencia las dos coordenadas del punto P son iguales. Se puede concluir que las soluciones de la ecuación “en la primera vuelta” son $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$.

Tramo F: Construcción de los gráficos de las funciones seno y coseno a partir de todas las relaciones construidas

Por cuestiones de espacio vamos a priorizar desarrollar otros tramos en este escrito.

Sólo detallamos que en esta etapa se llegaron a analizar los siguientes puntos:

. Valores de las funciones seno y coseno para los ángulos notables

. Dominio e Imagen de las funciones seno y coseno

. Signo de las funciones seno y coseno

. Período de las funciones seno y coseno

. Seno y coseno de ángulos opuestos

. Crecimiento y decrecimiento de las funciones seno y coseno

Tramo G: Variación de las funciones seno y coseno a partir de la modificación de sus parámetros

1. Sabes cómo graficar las funciones $f(x) = sen(x)y\ g(x) = \cos(x)$

a. Utiliza Geogebra para graficar parte de la “familia” de las funciones seno y coseno. Estas funciones tienen la forma $f(x) = a\ sen(x)$ $y\ g(x) = a\cos(x)$ donde a es una constante. Explica con tus palabras cómo este valor afecta a las gráficas.

b. Con Geogebra grafica funciones de la forma $f(x) = sen(bx)\ y\ g(x) = \cos(bx)$ donde b es una constante. Explica con tus palabras cómo este valor afecta a las gráficas.

c. Asígnale distintos valores a c y grafica funciones de la forma $f(x) = sen(x) + c$ y de la forma $g(x) = \cos(x) + c$. Explica con tus palabras cómo este valores afecta a las gráficas.

2. En el intervalo $[0; 2\pi]$, representen las siguientes funciones.

$j(x) = -sen(5x)$ $\qquad g(x) = \cos(0.5\,x) + 3$ $\qquad h(x) = -2sen(3x) + 1$

Para cada una de ellas:

. indiquen periodo, frecuencia y amplitud;

. realicen el análisis correspondiente (dominio, imagen, intersecciones con los ejes, conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento).

3. Dibujen la gráfica de la función $m(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$. Para ello construye una tabla de valores como la siguiente:

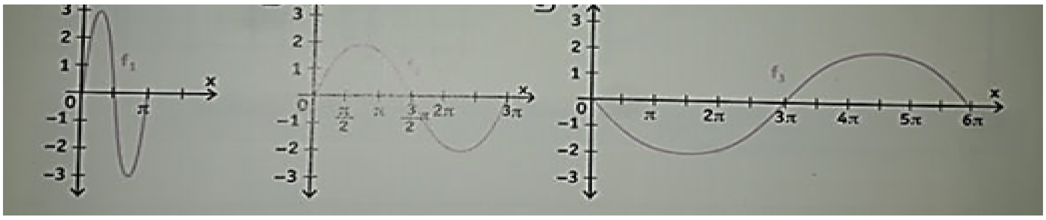
x					
$x + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$					

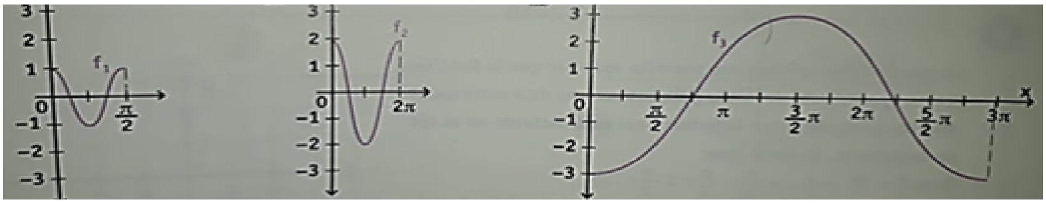
4. Construyan una tabla de valores como la anterior y realicen el gráfico de la función $l(x) = sen(x - \frac{\pi}{2})$.

5. A partir del gráfico de la función $f(x) = sen(x)$, ¿cómo graficarías la función $k(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$? ¿y la $t(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$?

6. ¿Qué modificaciones sufre la función $f(x) = sen(x)$ al graficar funciones de la forma $g(x) = sen(x \pm d)$?

7. Realiza en un mismo sistema de ejes cartesianos, y para el intervalo $[0; 2\pi]$, las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$. ¿Es una de ellas traslación de la otra? ¿Cuánto tienes que trasladar la función coseno para obtener la función seno?





8. Grafiquen las funciones:

$$v(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), d(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } j(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$$

Para cada una de ellas realicen el análisis correspondiente.

9. Las siguientes figuras muestran la gráfica de funciones del tipo $f(t) = a\,sen(bt)$ y $g(t) = a\cos(bt)$ en un intervalo de longitud T. Analícenlos y para cada uno indiquen: amplitud, frecuencia, periodo y su fórmula.

10. Dibujen la gráfica de la función $m(x) = sen(2x + \frac{\pi}{2})$. Para ello construye una tabla de valores como la siguiente:

x					
$2x + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$f(x) = sen(2x + \frac{\pi}{2})$					

11. Construyan una tabla de valores como la anterior y realicen el gráfico de la función

$l(x) = cos(3x - \pi)$.

12. A partir del gráfico de la función $f(x) = 3\,sen(2x)$, ¿cómo graficarías la función $k(x) = 3\,sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$? ¿y la $t(x) = 3\,sen\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$?

En el Tramo G, las/os estudiantes utilizan Geogebra para analizar las variaciones de las funciones seno y coseno al modificar diferentes parámetros. Luego de una guía de consignas para orientar la tarea y para habilitar el análisis de los diferentes parámetros de las funciones sinusoidales, se institucionalizan los conceptos de amplitud, periodo, frecuencia, ángulo de fase, todos ellos propios de las funciones trigonométricas.

Combinando las funciones trigonométricas...

Relacionadas con las funciones trigonométricas de seno y coseno aparecen unas funciones que son combinaciones de éstas, y que se utilizan para la modelización de muchas situaciones reales. Las funciones también llamadas funciones sinusoidales son:

$$f(t) = a\, sen(bt + d) + c \;\; y \; g(t) = a \cos(bt + d) + c$$

La principal característica de estas funciones es que sus gráficas se pueden obtener, si b > 0, aplicando las operaciones de funciones a las gráficas de $y = sen(x)$ e $y = \cos(x)$

¡Importante!

Las constantes a, b, c, y d que aparecen en la formulación indican:

***el valor absoluto de la constante "a" es la amplitud de la onda de la función, que indica el promedio de la diferencia entre los valores máximos y mínimos;**

***el período de la función es $\frac{2\pi}{b}$, e indica la longitud de la variable t a partir del cual se repetirán los valores;**

***el cociente $\frac{-d}{b}$ indica el número de unidades que se desplazará horizontalmente a la derecha o a la izquierda de la variable t (según sea d negativo o positivo) la gráfica de la función $f(t) = a\, sen(bt)$ y $g(t) = a\cos(bt)$.**

***la constante "c" indica el número de unidades que se desplazará verticalmente la gráfica de la función $f(t) = a\, sen(bt + d)$ y $g(t) = a\cos(bt + d)$**

Se propone para el debate estudiar con qué criterio, si se tiene que hacer una tabla de valores para graficar una función trigonométrica, se seleccionan los valores a ser hallados. Esto se pone en discusión con la intencionalidad de que se expliciten cuáles son los "puntos importantes" de los gráficos de las funciones trigonométricas.

Así preparamos el terreno para modelizar las situaciones del siguiente Tramo H.

Tramo H: Modelizar situaciones

1. En Johannesburgo, en junio, la temperatura mínima diaria usualmente es aproximadamente de 3°C y la temperatura máxima diaria alrededor de 18°C. La temperatura se ubica justo a la mitad entre la máxima diaria y la mínima diaria tanto a las 10 am como a las 10 pm, y la temperatura máxima es por la tarde. Encontrar una función trigonométrica que modele la temperatura T en Johannesburgo t horas después de: *Las 10 am. *Las 10 pm. *Media noche.

2. El perro de Carmen suele comerse las sobras, que varían de acuerdo a las estaciones. Como resultado, su peso fluctúa a lo largo del año. El peso del perro W (t) (en kg), como función del tiempo t (en días), en el transcurso del año puede modelarse con una expresión sinusoidal de la forma $(t) = a\cos(bt) + c$ Al inicio del año, tiene un peso máximo de 9.1 kg. Un cuarto de año después, tiene su peso promedio que es de 8.2 kg. Representar gráficamente la situación. Encontrar W (t).

3. El día más largo del año en Juneau (Alaska) es el 21 de junio, el cual dura 1096.5 minutos. Medio año después, cuándo los días son más cortos, los días duran 382.5 minutos. Si no es un año bisiesto, el año tiene 365 días y el 21 de junio es el día 172 del año. Encuentra una función trigonométrica que modele la duración L del día t del año, suponiendo que no es un año bisiesto.

Para estos problemas, se pone en juego todo lo trabajado hasta el momento. Las/os estudiantes combinan el trabajo con lápiz y papel y con Geogebra; y, al cargar la función propuesta, van corroborando la información de la situación y, de ser necesario, realizando ajustes a su modelo.

Tramo I: Tenemos un problema

Llegamos al final de la propuesta, momento en que pudimos retomar el problema que dio origen a nuestro proyecto.

Retomamos la situación que dio origen a nuestra propuesta. El problema es resolver en la inecuación que se transcribe a continuación, a partir de qué $n \in N$, la distancia entre el valor de un término de la sucesión y su límite se mantiene menor que un ε=0.1

$$\left|\frac{sen\ (n)}{n}\right| < 0.1$$

Estrategia de resolución 1

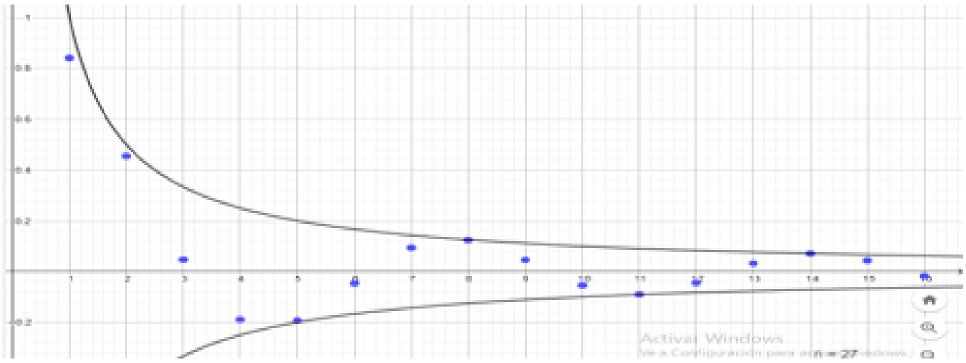
Reescribimos la sucesión como $a_n = \frac{1}{n}\,sen(n)$. Podemos decir que: $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\,sen(n) \leq \frac{1}{n}$.

Esto se debe a que en la familia de funciones de la forma $f(x) = \frac{1}{n}\,sen(x)$, el factor $\frac{1}{n}$ es la amplitud de la función, en particular para cualquier n natural.

Vimos que $sen(x) = 1$ siempre que $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\right\}$. También podemos decir que si $y \in \left\{\frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in Z\right\}$ se tiene que $sen(y) = -1$.

Entonces, como n es un número natural, $sen(n) \neq 1$ y $sen\,(n) \neq -1$. De esta manera la desigualdad: $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\,sen(n) \leq \frac{1}{n}$ se restringe a $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}\,\boldsymbol{sen(n)} < \frac{1}{n}$.

Todo esto lo pudimos ver gráficamente, al realizar los gráficos de las funciones $y = \frac{1}{n}$ e $y = -\frac{1}{n}$, y el gráfico de la sucesión $a_n = \frac{sen(n)}{n}$.

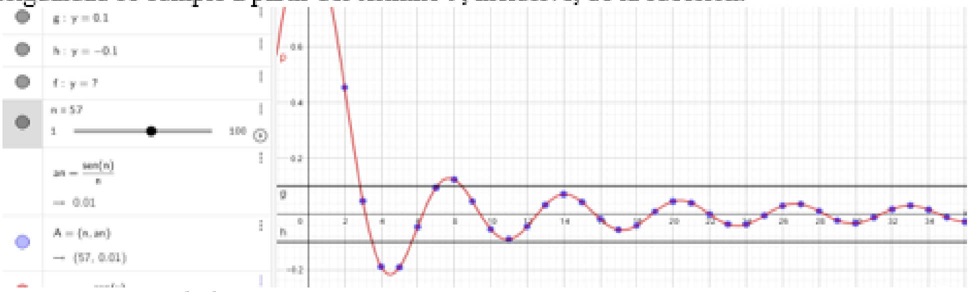


Aclaración: al darle zoom, por ejemplo, se puede ver que $\frac{sen(8)}{8} \neq \frac{1}{8}$.

Con todo esto podemos concluir que a partir de $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\varepsilon}$ seguro que $\left|\frac{sen(n)}{n}\right| < \varepsilon$.

Para nuestra inecuación, $\left|\frac{sen\,(n)}{n}\right| < 0.1$ podemos decir que para n > 10 (del término 11 en adelante) siempre se cumple la desigualdad. Por ejemplo para el término 11 podemos asegurar que $\left|\frac{1}{11}\,sen(11)\right| < \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = 0{,}1$ sin necesidad de calcular el valor de $sen(11)$.

Por otro lado, al momento de resolver de manera gráfica la inecuación tenemos que la desigualdad se cumple a partir del término 9, inclusive, de la sucesión.



Como $-0.1 < \frac{sen(10)}{10} < 0.1$ entra en juego el valor del $|sen(10)|$ porque $\frac{1}{10} = 0{,}1$. Lo mismo en el caso del término 9°, porque $\frac{1}{9} > 0.1$

Es importante aclarar que, por ejemplo, el tercer término satisface la desigualdad pero como el cuarto no, y como nuestro objetivo es encontrar a partir de que término la distancia entre la sucesión y su límite siempre es menor que un determinado ε desestimamos esta solución.

Estrategia de resolución 2

Vimos que la función $f(x) = sen(x)$ tiene como imagen el intervalo $[-1; 1]$, en particular los términos de la sucesión $a_n = sen(n)$ van a pertenecer al intervalo $(-1; 1)$ debido a que $sen(n) \neq 1$ y $sen\ (n) \neq -1$ para cualquier número natural. Por otro lado, la inecuación $\left|\frac{sen\ (n)}{n}\right| < 0.1$ la podemos reescribir como $|sen\, n| < 0.1n$. Entonces si resolvemos la ecuación $0.1n = 1$ se puede determinar a partir del término 10 de la sucesión se verifica $-0.1n < sen(n) < 0.1n$.

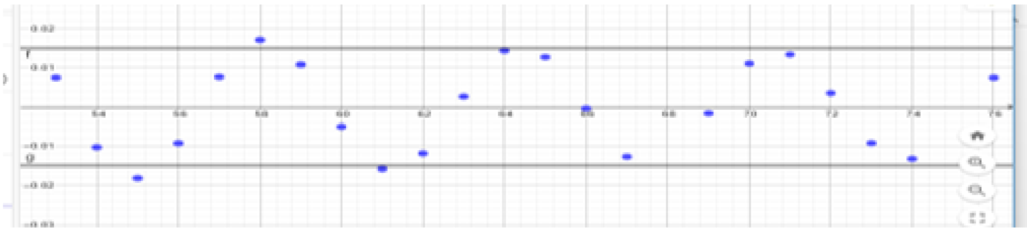
En definitiva, mediante las dos estrategias de resolución y por el momento, para la sucesión $a_n = \frac{sen(n)}{n}$ podemos encontrar el valor de n para el cual, a partir de él, siempre se cumple la desigualdad $|a_n| < \varepsilon$. Una vez determinado ese valor, comenzamos a calcular, uno a uno y de manera decreciente, los términos de la sucesión hasta encontrar uno que no satisfaga la desigualdad. De esta manera podemos resolver nuestro problema.

Formulación de un problema nuevo:

Luego de proponer diferentes valores a ε, y de buscar la solución de la inecuación tenemos, como próxima conjetura a explorar que, una vez determinado un n "provisorio", como máximo hay que probar con los 6 o 7 términos anteriores. Esta cantidad de términos no es casual, creemos que está vinculado al período de la función seno.

Veamos un ejemplo:

Para $\varepsilon = 0.015$, gráficamente tenemos que a partir del término 62 inclusive siempre se cumple que $\left|\frac{sen(n)}{n}\right| < 0.015$.



En el gráfico se puede observar que el término 60 verifica la desigualdad, en el caso del término 61 se tiene que $\left|\frac{sen(61)}{61}\right| > 0.015$ y que a partir del término 62 siempre se verifica que $\left|\frac{sen(n)}{n}\right| < 0.015$.

Sin recurrir al grafico podemos proceder de la siguiente manera:

Primero resolvemos la ecuación $\frac{1}{n} = 0.015$. En este caso como nos da $n = 66.66$ y estamos trabajando con sucesiones, consideramos a n = 67. En principio, podemos decir con seguridad que a partir del término 67, inclusive, la distancia entre la sucesión y su límite es menor que 0.015.

Ahora solo resta determinar los valores de los términos anteriores, hasta encontrar alguno que no cumpla con la condición. Realizando los cálculos tenemos que:

$$a_{66} = -0.0004,\ a_{65} = 0.0127, a_{64} = 0.0143, a_{63} = 0.0026, a_{62} = -0.0119$$
$$y\ a_{61} = -0.0158$$

Al igual que como lo hicimos de manera gráfica, podemos decir que para todo número natural mayor o igual que 62 se verifica que $\left|\frac{sen(n)}{n}\right| < \mathbf{0.015}$

Conclusiones

El problema de la enrolladora posibilitó una entrada al estudio de las funciones trigonométricas. Tras explorar la periodicidad y la simetría de la circunferencia trigonométrica se pudo establecer una relación entre una longitud w del hilo y una posición P en el plano cartesiano. Esta relación permitió ampliar las razones trigonométricas a cualquier tipo de ángulo, encontrar relaciones entre las razones trigonométricas, la reducción al primer cuadrante, entre otras cosas. Al establecer una relación entre la longitud w del hilo y el ángulo α se pudo institucionalizar un sistema de medición desconocido por los estudiantes, el sistema de medición circular. En primer momento se trabajó en una configuración cuadrada. Al transferir a una circunferencia se comenzaron a establecer relaciones entre las coordenadas del punto P, lo que permitió definir las funciones seno y coseno. Con el análisis en términos de función -dominio, imagen, raíces, crecimiento y decrecimiento- y todas las relaciones establecidas se pudo construir su gráfica. También las estrategias que surgen al trabajar con este problema funcionaron como fundamentos para resolver ecuaciones e identidades trigonométricas. Las discusiones colectivas, las institucionalizaciones registradas en las carpetas de los estudiantes y las evaluaciones dan cuenta de la apropiación de las conceptualizaciones trigonométricas abordadas. Las consignas propuestas para estabilizar el conocimiento - de cada tramo-, referidas a calcular el valor de razones trigonométricas para cualquier tipo de ángulo, obtener una razón a partir de otra dada, realizar conversiones entre los dos sistemas de medición angular, reducir las relaciones de cualquier ángulo a las de uno agudo, resolver ecuaciones trigonométricas sencillas y validar identidades trigonométricas, todas ellas permitieron operar con las conceptualizaciones construidas y transferir a nuevos contextos.

Por último, el problema alrededor del cual gira toda la secuencia, de determinar a partir de qué $n \in N$ la distancia entre un término de la sucesión y su límite se mantiene siempre menor que un ε, que tiene su síntesis en el tramo *Tenemos un problema*, resulta una buena expresión de situaciones para las cuales las construcciones trigonométricas trabajadas resultan una potente estrategia de solución.

Estos recorridos permiten seguir describiendo prácticas educativas reales del trabajo en aula de Matemática, con objetivos complejos de que las/os alumnas/os puedan fundamentar y justificar la utilización oportuna de esos saberes construidos como modo de dar cuenta de su apropiación, operar y transferir a nuevos contextos las relaciones construidas y llegar a modelizar situaciones a partir de las conceptualizaciones y de los procesos trabajados y utilizar esos modelos para resolver situaciones problemáticas. Fuertes desafíos, posibilidades reales.

Referencias bibliográficas

Bocco, M (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica

de Guzmán, M. Colera Jiménez, J. (1995). *Bachillerato. Matemáticas 1*. Madrid: Grupo Anaya

de Guzmán, M. Colera Jiménez, J. (1996). *Bachillerato. Matemáticas 2*. Madrid: Grupo Anaya

Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia de la Pampa. Subsecretaría de Coordinación. Dirección General de Planeamiento, Evaluación y Control de Gestión (2013). *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Ciclo Orientado. Versión Preliminar*.

Ministerio de Educación (2018) Ateneo Matematica: Modelización con funciones periódicas. Encuentro 1. http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/wp-content/uploads/2018/09/Nivel-Secundario-Ateneo-Did%C3%A1ctico-N%C2%B0-1-Encuentro-1-Ciclo-Orientado-Matem%C3%A1tica-Carpeta-Participante.pdf

Rabino, A. y Cuello, P (2017). *Matemática realista en la educación secundaria. Proyectos con secuencias didácticas*. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.