
Cartoon Face

Campo de Prácticas

PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNLPAM

Campo de Prácticas, junio 2021, ISSN 2718-8787, pp. 266-322

La parábola del camino

Cinthia Tejo

cynthia.tejo@yahoo.com.ar

Profesorado en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam

Resumen

El objetivo de este trabajo es fundamentar el álgebra como instrumento de modelización matemática, particularmente se pretende llegar a concluir que las ecuaciones cuadráticas son herramientas que lo permiten. Durante el desarrollo de la investigación se intenta explicar cómo a través de dicha herramienta es posible comunicar el pensamiento algebraico que nos permite representar situaciones de nuestra vida cotidiana (por ejemplo: los cálculos que se necesitan en las áreas de ingeniería y arquitectura). Además, se presentan aspectos importantes tales como técnicas para la resolución algebraica de problemas verbales y las dificultades que esto conlleva.

Introducción

Aun cuando muchos problemas se pueden resolver, o aproximar bien, mediante ecuaciones lineales, existen muchos otros que sólo se pueden resolver mediante ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones cuadráticas ocurren muy a menudo ya que describen con precisión muchas situaciones de la realidad y tienen soluciones exactas que se pueden calcular en forma directa. Para ello es necesario comprender el funcionamiento de la función cuadrática, estudiar los tipos de problemas que esta función modeliza, analizar el modo de crecimiento, la existencia de máximo o mínimo, la simetría, todas las formas de representarla (contexto, tabla de valores, gráfico cartesiano, fórmula) y la relación entre las distintas representaciones.

Fundamentos de la Matemática

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas entonces el producto de p por q es igual a cero sí y sólo sí p es igual a cero o q es igual a cero.

Se deduce que si ax^2+bx+c se puede escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos. Esta técnica se conoce como ***método de factorización*** (Cole y Swokowski, 2009, p. 81)

EJEMPLO 2 **Resolución de una ecuación por factorización**

Resuelva la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Procedemos como en el ejemplo 1:

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + 16 = 8x & \text{enunciado} \\
x^2 - 8x + 16 = 0 & \text{restar } 8x \\
(x-4)(x-4) = 0 & \text{factorizar} \\
x - 4 = 0, \quad x - 4 = 0 & \text{teorema del factor cero} \\
x = 4, \qquad x = 4 & \text{despejar } x
\end{array}
$$

Por tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución, 4.

Como $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución previa, a 4 lo llamamos **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para algún número $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o, lo que es equivalente,

$$\left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right) = 0.$$

Al igualar a cero cada factor nos da las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia usamos el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más o menos* $\sqrt{d}$) para representar $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$. Entonces, para $d > 0$, hemos demostrado el siguiente resultado. (El caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos que se estudia en la Sección 2.4.)

Figura 1. Ejemplo sobre la resolución de una ecuación por factorización.

Completar cuadrados

“Para completar el cuadrado para x^2 +kx ó x^2 -kx sumamos (k/2) ^2; esto es, sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x” (Cole y Swokowski, 2009, p. 83)

(1) x^2 +kx + (k/2) ^2= (x+ k/2) ^2

(2) x^2 -kx +(k/2) ^2= (x-k/2) ^2

EJEMPLO 5 **Resolución de una ecuación cuadrática al completar el cuadrado**

Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Es conveniente primero reescribir la ecuación para que los únicos términos que contengan x se encuentren en el lado izquierdo, como sigue:

$x^2 - 5x + 3 = 0$	enunciado
$x^2 - 5x = -3$	reste 3
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	completar el cuadrado, sumando $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a *ambos* lados
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$	ecuación equivalente
$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$	tome la raíz cuadrada
$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$	sumar $\frac{5}{2}$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $\left(5 + \sqrt{13}\right)/2 \approx 4.3$ y $\left(5 - \sqrt{13}\right)/2 \approx 0.7$.

Figura 2. Ejemplo sobre la resolución de una ecuación cuadrática al completar cuadrado.

Fórmula cuadrática

“Si a es distinto de cero, las raíces de ax^2 +bx+c están dadas por la fórmula que aparece a la izquierda de la Figura 1” (Cole y Swokowski, 2009, p. 84)

La fórmula cuadrática nos da dos soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Que son $x = x_1, x_2$, *donde*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. (El caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la siguiente sección.) continuemos como sigue:

$ax^2 + bx + c = 0$	enunciado
$ax^2 + bx = -c$	reste c
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	divida entre a
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$	complete el cuadrado
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	ecuación equivalente
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	tome la raíz cuadrada
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	reste $\frac{b}{2a}$

Podemos escribir el radical de la última ecuación como

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, vemos que en todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Figura 3. A la derecha: demostración de la fórmula cuadrática.

“El número b^2-4ac bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante se puede usar para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como en la tabla siguiente” (Cole y Swokowski, 2009, p. 85)

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	**Naturaleza de las raíces de** $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y desiguales
0	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

Figura 4. Naturaleza de las raíces de una función cuadrática en su forma polinómica según el valor del discriminante.

EJEMPLO 6 Uso de la fórmula cuadrática

Resuelva la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$

SOLUCIÓN Sea $a = 4$, $b = 1$, y $c = -3$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} \qquad \text{simplifique el discriminante}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8} \qquad \sqrt{49} = 7$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1.$$

Figura 5. Ejemplo sobre el uso de la fórmula cuadrática.

Definición de una función cuadrática

“Una función f es función cuadrática si f(x)=ax^2 +bx+c donde a, b y c son números reales y a es distinto de cero” (Cole y Swokowski, 2009, p. 213)

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, al completar el cuadrado, podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Expresar una función cuadrática como $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN 1 Antes de completar el cuadrado, *es esencial que factoricemos el coeficiente de x^2 de los dos primeros términos de* $f(x)$, como sigue:

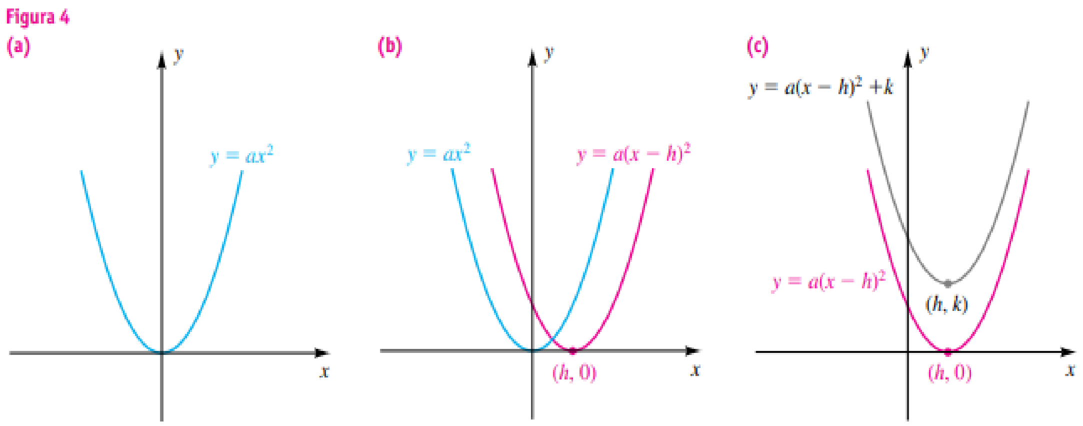
$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{factorizar 3 de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro de los paréntesis al sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{8}{2}\right)^2$ o sea 16. No obstante, si sumamos 16 a la expresión dentro de los paréntesis, entonces, debido al factor 3, estamos en realidad sumando 48 a $f(x)$. Por lo tanto, debemos compensar al restar 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{complete el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$, y $k = 2$

Figura 6. Ejemplo sobre cómo expresar una función cuadrática como f(x)= a(x-h)^2 +k.



El trazo en la figura 4(c) ilustra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el punto más bajo en la parábola y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto en la parábola. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido el resultado siguiente.

Figura 7. Gráficas que indican el proceso de construcción de la función

f(x)= a(x-h) ^2 +k.

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

"La gráfica de la ecuación y=a(x-h)^2+k para a distinto de cero es una parábola que tiene vértice V(h;k) y un eje vertical. La parábola abre hacia arriba si a es positivo o hacia abajo si a es negativo" (Cole y Swokowski, 2009, p. 215)

Teorema para localizar el vértice de una parábola

"El vértice de la parábola f(x)=ax^2+bx+c tiene coordenada x=-b/2a" (Cole y Swokowski, 2009, p. 217)

PRUEBA Empecemos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \quad\right) + c.$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión dentro de los paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Nótese que si $b^2/(4a^2)$ se suma *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a del *exterior*, en realidad hemos sumado $b^2/(4a)$ a y. Por tanto, debemos compensar al restar $b^2/(4a)$. La última ecuación se puede escribir como

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Ésta es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.

Figura 8. Prueba sobre la ecuación de una parábola con vértice en (h,k).

Como la gráfica de f(x)=ax^2+bx+c –para a distinto de cero– es una parábola, podemos usar la fórmula del vértice para ayudar a encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Específicamente, como la coordenada x del vértice V es -b/2a, la coordenada y de V es el valor de la función f(-b/2a). Además, como la parábola abre hacia abajo si a es negativo y hacia arriba si a es positivo, el valor de esta función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f (Cole y Swokowski, 2009, p. 218)

De acuerdo a estos autores podemos resumir estos datos como sigue:

Teorema sobre el valor máximo y mínimo de una función cuadrática:

“Si f(x)=ax^2+bx+c para a distinto de cero, entonces f(-b/2a) es

(1) el valor máximo de f si a es negativo

(2) el valor mínimo de f si a es positivo” (Cole y Swokowski, 2009, p. 218)

Al trabajar con funciones cuadráticas, con frecuencia estamos más interesados en hallar el vértice y los puntos de cruce con el eje x. Típicamente, una función cuadrática determinada se asemeja con mucho a una de las tres formas que se indican en la tabla siguiente (Cole y Swokowski, 2009, p. 222)

Forma	Vértice (h, k)	Puntos de intersección con el eje x (si los hay)
(1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (vea abajo)
(2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
(3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (vea abajo)

Figura 9. Relación entre las tres formas de escribir una función cuadrática, sus vértices y puntos de intersección con el eje x.

Fundamentos de la Didáctica de la Matemática

De acuerdo con Font y Godino, el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones (Font y Godino , 2003, p. 774)

Para Font y Godino algunas características particulares que se aprecian del álgebra son:

“El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan variables y la expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas y funciones” (Font y Godino, 2003, p. 774)

Dichas variables, ecuaciones, fórmulas y funciones son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la misma matemática o de otra índole. Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución.

Esta visión ampliada del ***álgebra como instrumento de modelización matemática*** es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos (Font y Godino, 2003, p. 778)

Entonces, recuperamos de los autores que se destacan los siguientes aspectos importantes:

- Una técnica potente para resolver algebraicamente los problemas verbales es el uso de letras para expresar cantidades desconocidas, es decir variables que pueden tomar un conjunto de valores posibles. Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde el comienzo de la enseñanza secundaria, es dominar dicha técnica (Font y Godino, 2003, p)
- Las dificultades que tienen los alumnos en el uso de las variables en el contexto de la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad. La característica fundamental de una variable - que puede tomar valores diferentes pertenecientes a un cierto dominio - difiere de la orientación que se desarrolla con las experiencias iniciales en la resolución de ecuaciones. Para resolver una ecuación los alumnos manipulan u operan con las variables como si fueran números. Con frecuencia esto se hace antes que logren un nivel apropiado de uso de las letras que les permita comprender lo que están haciendo con las variables (Font y Godino, 2003, p)

Fuentes curriculares

De acuerdo a los Materiales Curriculares (Matemática) seleccionados para el Quinto Año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, los conceptos se dividen en cuatro ejes temáticos:

. El Número y el Álgebra,

. Funciones y el Álgebra,

. Geometría y el Álgebra,

. Probabilidad y estadística.

Como me corresponde realizar la residencia en Quinto año primera del Ciclo Orientado, de acuerdo al eje temático “Funciones y el álgebra”, presentaré la modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones cuadráticas.

Esto supone:

. Modelización de situaciones extramatemáticas e intra matemáticas mediante funciones cuadráticas:

-usando nociones de dependencia y variabilidad,

-seleccionando la representación (tablas, fórmulas, gráficos con recursos tecnológicos) adecuada a la situación,

-interpretando dominio, codominio, variables, parámetros y los puntos estratégicos (raíces, ordenada al origen, extremos: máximos, mínimos, entre otros).

. Comparación de crecimientos lineales y cuadráticos.

. Análisis del comportamiento de las funciones cuadráticas:

-interpretando la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (factorizada, canónica, polinómica),

-vinculando las variaciones de sus gráficos con sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos (Materiales Curriculares, 2013, p. 20-21)

Conclusiones

Las prácticas de aprendizaje tienen como principal fin apropiarse de la asignatura Matemática, y en general para formarse como persona íntegra en lo físico, psicológico y social desempeñándose en forma crítica autónoma y responsable en la vida escolar y en la sociedad. Esto no implica que al tener una situación cotidiana se recurrirá a retomar un teorema, una propiedad, una construcción netamente intra matemática; pero sí se retomará las herramientas de exploración, de validación y de confrontación para resolverla. De esta manera se reconoce la apropiación del conocimiento matemático como un proceso intelectual en el estudiante, permitiendo efectivizar el proceso de aprendizaje (Van Cauwenberghe, 2016, p. 1)

Al igual que en los años anteriores, Quinto año conserva el trabajo en los diferentes ejes: Número y álgebra, Funciones y álgebra, Geometría y medida, Estadística y probabilidades. Con respecto al eje Funciones y álgebra, se propone la adquisición de herramientas que permitan estudiar procesos que crecen o decrecen de manera cuadrática apelando al estudio de las funciones que los modelizan. Dichos procesos demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso de lenguaje algebraico, por lo tanto, las ecuaciones cuadráticas se convierten en herramientas necesarias para estudiar tales procesos.

En consecuencia, podemos decir que las ecuaciones cuadráticas son instrumentos de modelización matemática. Dependiendo de cada situación, la ecuación cuadrática que necesitemos puede adoptar cierta forma, por lo que seguiremos los métodos de resolución correspondientes para obtener el valor de la variable que deseamos hallar.

Con este panorama sobre ecuaciones cuadráticas y sus métodos de resolución, los estudiantes podrán estar en condiciones de resolver problemas como encontrar las dimensiones de figuras geométricas, además de otro tipo de situaciones que se expresan mediante el uso del lenguaje algebraico. Es así como se pretende que los estudiantes vean la matemática como una herramienta necesaria para resolver problemas o situaciones que se presentan en un contexto social.

Bibliografía

Cicala R.A., Díaz B.H., Franco E., Kaczor J.P., Schaposchnik R.A., y Franco E. (2000). *Matemática I*. Buenos Aires: Santillana**.**

Cole J., y Swokowski E. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría Analítica.* México: Edamsa Impresiones, S.A.

Font V., y Godino J.D. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada: ReproDigital. C/ Baza, 6.

Gobierno de la Pampa. Ministerio de Cultura y Educación. Subsecretaría de Coordinación (2013). *Materiales Curriculares de Matemática. Ciclo Orientado de la Educación Secundaria*. Recuperado de: https://www.fhumanas.com.ar/pluginfile.php?file=%2F1816%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FDISE%C3%91OS%20CURRICULARES%20LA%20PAMPA.pdf

Van Cauwenberghe N.G. (2016). *Proyecto Anual de Matemática Tercer año*. Recuperado de: https://es.slideshare.net/nancygisel/proyecto-anual-de-matemtica-para-tercer-ao-creacin-en-2016

Propuesta de aula. ***Función cuadrática***

Contenidos. Eje: En relación con las funciones y el álgebra.

Problemas de aplicación que implican:

. resolución de ecuaciones cuadráticas,

. interpretación de la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas (factorizada, canónica, polinómica),

. vinculación de las variaciones de sus gráficos con sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones (Materiales Curriculares, 2013, p. 20-21)

Cuadro sobre la relación contenido/tiempo/actividades

Contenido/s	**Tiempo**	**Actividad/es**
Crecimiento, existencia de un mínimo, formas de representación de una función cuadrática (contexto, tabla de valores, gráfico y fórmulas) y sus respectivas relaciones.	1 Módulo (80 minutos)	Actividad 1) *"El problema del gallinero de Raúl (Parte 1)"*
Crecimiento, existencia de un máximo, formas de representación de una función cuadrática (contexto, tabla de valores, gráfico y fórmulas) y sus respectivas relaciones.	1 Módulo y medio (120 minutos)	Actividad 2) *"El problema del gallinero de Raúl (Parte 2)"*
Análisis de la fórmula canónica de la función cuadrática. Existencia de un valor máximo. Relación algebraica-gráfica.	1 Módulo y medio (120 minutos)	Actividad 3) "*El microemprendimiento de los técnicos (Parte 1)"* *Se entregó como tarea* la Actividad 4) .
Análisis de la fórmula canónica de la función cuadrática. Existencia de un valor mínimo. Función que cumple el coeficiente cuadrático "a". Relación algebraica-gráfica.	1 Módulo (80 minutos)	Corrección y conclusiones de la Actividad 4). *Se dio como trabajo entregable* la Actividad 3) "*El microemprendimiento de los técnicos (Parte 2)"*
Relación algebraica-gráfica que implica: Análisis de los puntos notables	2 Módulos (160	Actividad 5) "*Juego de las tarjetas"* *Se dio como trabajo entregable* la Actividad 6).

(raíces, vértices, ordenada al origen). Análisis de las diferentes formas de escribir una función cuadrática.	minutos)	
Interpretación de la información que portan las fórmulas de una función cuadrática (canónica, polinómica y factorizada). Representación gráfica de manera cuantitativa.	1 Módulo (80 minutos)	Actividad 6) *Trabajo entregable: "Actividad integradora"*

Objetivos por núcleo de actividades

Actividades	Objetivos
Actividad 1) *"El problema del gallinero de Raúl (Parte 1)*"	Analizar el modo de variación de una función cuadrática y la existencia de un mínimo a partir de la resolución de un problema en un contexto geométrico.
Actividad 2) *"El problema del gallinero de Raúl (Parte 2)"*	Analizar el modo de variación de una función cuadrática y la existencia de un máximo partir de la resolución de un problema en un contexto geométrico.
Actividad 3) a) *"El microemprendimiento de los técnicos (Parte 1)"*	Analizar la función cuadrática en su forma canónica. Identificar la existencia de su punto máximo. Graficar.
Actividad 3) b) *Trabajo entregable: "el microemprendimiento de los técnicos (Parte 2)"*	Analizar la función cuadrática en su forma canónica. Identificar la existencia de su punto mínimo. Graficar.

Actividad 4) *"Tarea"*	Interpretar la información que portan los gráficos de funciones cuadráticas escritas en su forma canónica (mínimos, máximos y el coeficiente cuadrático "a").
Actividad 5) *"Juego de las tarjetas"*	Establecer relaciones entre la representación algebraica y gráfica de una función cuadrática. Analizar las diferentes formas de escribir una función cuadrática (canónica, polinómica y factorizada).
Actividad 6) *Trabajo entregable: "Actividad integradora"*	Identificar parámetros (coeficiente cuadrático) y puntos estratégicos (ordenada al origen, extremos: máximos o mínimos y raíces) de una función cuadrática escrita en sus diferentes formas (canónica, polinómica y factorizada). Graficar cuantitativamente.

Marco de la planificación anual

De acuerdo a los Materiales Curriculares (Matemática) seleccionados para el Quinto Año del

Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, los conceptos se dividen en cuatro ejes temáticos:

El Número y el Álgebra, Funciones y el Álgebra, Geometría y el Álgebra y Probabilidad y estadística.

A continuación, se resume el recorrido de los contenidos seleccionados para la propuesta anual de trabajo. Este consta de cuatro unidades que respectivamente corresponden a los cuatro ejes temáticos.

Unidad 1	**Unidad 2**	**Unidad 3**	**Unidad 4**
Progresión aritmética y geométrica.	Función cuadrática Problemas de aplicación. Dominio e imagen. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Intersección con los ejes. Construcción del gráfico Ecuación polinómica, canónica y factorizada Discriminante	La circunferencia trigonométrica.	Medidas de dispersión: varianza y desviación estándar. Inferencias a partir de datos estadísticos.

	Problemas de máximos y mínimos.		
Criterios para representar los números reales y ordenarlos en la recta numérica.	Funciones y ecuaciones racionales Dominio e imagen. Gráficos de funciones racionales Intersección con los ejes Asíntotas verticales y horizontales Construcción del gráfico	Razones trigonométricas.	Sucesos excluyentes y no excluyentes
Orden y densidad de los números reales.	Funciones y ecuaciones exponenciales Problema de aplicación Gráfico Dominio e imagen.	Teorema del seno y coseno.	Sucesos independientes y dependientes.
Redondeo, truncamiento y cálculo de error.			Probabilidad condicional.

Recursos y materiales didácticos:

- GeoGebra como medio para enriquecer la comprensión de problemas ya que potencia la representación gráfica, la rapidez de cálculo y la modelización sin acudir a la forma clásica.
- La calculadora como medio para explorar relaciones matemáticas y para resolver cálculos en problemas más complejos.
- Materiales didácticos (juegos, afiches, videos, etc.).

Actividades de enseñanza y aprendizaje

Actividad 1. El problema del gallinero de Raúl (Parte 1)

Raúl, un hombre de campo, tiene una pequeña parcela de 8m de largo por 8m de ancho. Desea dividirla de tal manera que queden dos sectores para separar las gallinas comunes de las pigmeo. Quiere que cada gallinero (P y C, donde P corresponde a las gallinas pigmeos y C a las comunes) sea cuadrangular (como se muestra en la figura 1) y le interesa saber cuánto deben medir los lados de cada sector para que ocupen el menor espacio posible.

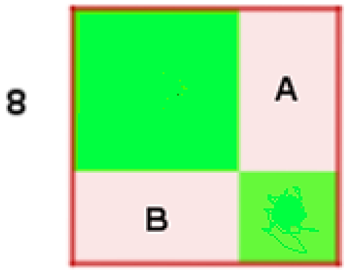


Figura 1

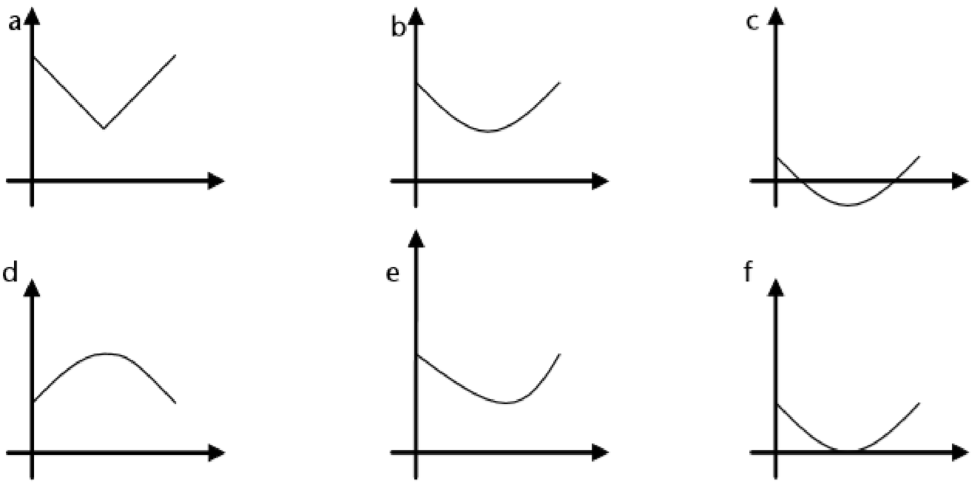
a) Completá la tabla de valores donde se especifiquen solamente las medidas de los lados de los gallineros P y C, el área de cada uno de ellos y el área sombreada en cada caso. (Más adelante se trabajará con la columna *"Área blanca")*.

Lado p	Lado c	Área de P	Área de C	Área sombreada	Área blanca
1					
2	6	4	36	40	24
3					
4					
5					
6					
7					

b) ¿Habrá otro par de gallineros P y C cuya suma de sus áreas sea igual 40m^2? Si existen indicar el valor de cada uno de sus lados (*lado p y lado c*).

c) ¿Habrá algún valor del lado del gallinero P para el cual el área sombreada sea mayor a 50m^2? Justificar.

d) ¿Habrá algún valor del lado del gallinero P para el cual el área sombreada sea menor a 30m^2 ? Si existe dar el valor del lado del gallinero C.
e) Decidir cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la representación del área sombreada en función de la medida del lado del gallinero P (*lado p*). Justificar la respuesta.



f) Completar la columna *"Área blanca"*. Comparar los valores del área sombreada con los valores del área blanca. Escribir conclusiones.
g) Si tuvieran que dar una fórmula que represente el área sombreada a partir de la medida del lado del gallinero P (*lado p*), ¿cómo la calcularían? Escribirla si es posible.

Posibles resoluciones de alumnos

a)

Lado n	Lado m	Área de N	Área de M	Área sombreada	Área blanca
1	7	1	49	50	
2	6	4	36	40	24
3	5	9	25	36	

4	4	16	16	32	
5	3	25	9	36	
6	2	36	4	40	
7	1	49	1	50	

b) *Posible resolución 1:*

Sí existe otro par de cuadrados donde el lado n mide 6 metros y el lado m mide 2 metros.

Posible resolución 2:

Sí existen otros cuadrados N y M nada más que tienen los lados al revés. El lado n medía 2 metros y ahora mide 6, el lado m medía 6 metros entonces ahora va a medir 2 metros.

c) *Posible resolución 1:*

No hay pares de cuadrados mayores a 50m² pero si igual, ya que la división de parcelas no permite que sea un número mayor o igual a 50m².

Posible resolución 2:

No hay un valor del lado del cuadrado N que me dé un área sombreada mayor a 50 porque por ejemplo si el lado del cuadrado N mide 8 metros ocuparía toda la parcela y Raúl necesita dividir la parcela en dos partes para separar las gallinas.

Posible resolución 3:

Para que el área sombreada me dé mayor a 50, hay que aumentar el valor del lado del cuadrado n. Sabemos que si el lado n mide 7 metros entonces el área sombreada es igual a 50 pero no mayor, o sea que para encontrar un área mayor a 50 el lado n tiene que medir más que 7 metros, por ejemplo 8, 9 o 10. Pero éstas medidas superan el área de la parcela o es igual al área de la parcela, lo cual quedaría la misma parcela sin la división que quiere Raúl.

d) *Posible resolución:*

No hay valores que permitan que el área sombreada sea menor a 30m^2.

e) Posible resolución 1:

Considero el gráfico b) porque toma valores positivos de manera continua.

Posible resolución 2:

Elijo el b) porque cuando el lado n aumenta, el área sombreada disminuye pero a partir del valor 5 el área sombreada aumenta. Baja y después sube.

Posible resolución 3:

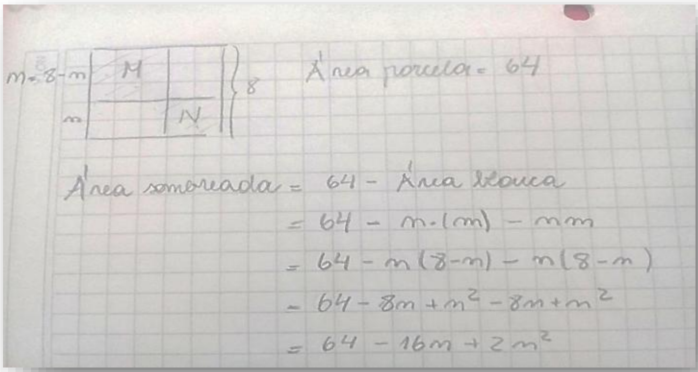
El a) es parecido al b) porque baja y después sube pero cuando unimos los puntos con una línea recta hay puntos que no agarra. Entonces elegimos el b).

f) *Posible resolución 1:*

Lado n	Lado m	Área de N	Área de M	Área sombreada	Área blanca
1	7	1	49	50	14
2	6	4	36	40	24
3	5	9	25	36	28
4	4	16	16	32	32
5	3	25	9	36	28
6	2	36	4	40	24
7	1	49	1	50	14

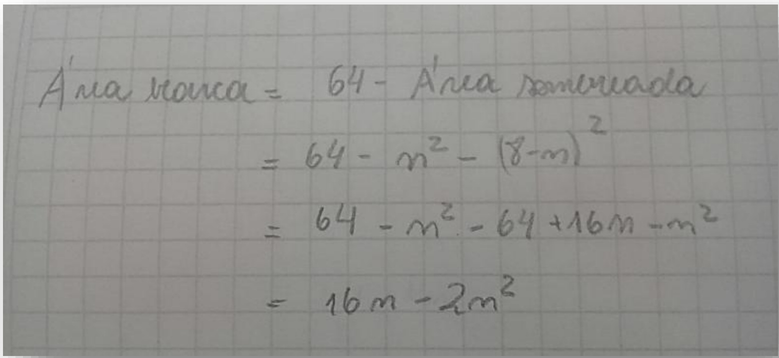
Rta: Área sombreada= (8-n)^2+n^2

Posible resolución 2:

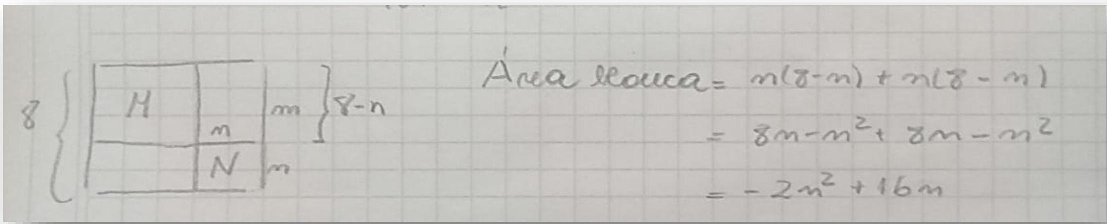


g) *Posible resolución 1:*
Área blanca=[(8-n).n]+[(8-n).n]

Posible respuesta 2:



Posible respuesta 3:



Intervenciones docentes

Con respecto al enunciado.

Presento la forma de trabajo: Se les pide a los alumnos que formen grupos de 3 personas como mínimo y se les aclara que los incisos de la actividad se irán trabajando grupalmente y que cuando finalicen el apartado a), se analizarán de forma oral las posibles resoluciones y así sucesivamente para los demás apartados.

Luego se pide que alguien lea el problema. Una vez leída la situación problemática, se procede a explicar el contexto de la misma: La figura 1 representa la parcela de 8 metros por 8 metros, es decir con un área de 64 metros cuadrados. Dentro de la parcela, Raúl desea dividirla en sectores cuadrangulares de tal forma que las gallinas comunes queden separadas de las pigmeos, pero quiere ocupar el menor espacio posible del total de su parcela. ¿Cuáles son las medidas de los lados de cada sector para que eso ocurra?

Con respecto a los incisos,

- **a)** Para llenar la primera fila, sabiendo que el lado de la parcela mide 8 metros y comparte una parte del lado del cuadrado N que mide 1 metro, entonces ¿cuántos metros mide el lado del cuadrado M?, ¿cómo calculamos el área de un cuadrado?
- **b)** A pares de cuadrados se refiere a los sectores M y N cuyas sumas de áreas me de 40m^2. Es decir que tenemos que encontrar otros cuadrados M y N para los cuales la suma de sus áreas sea igual a 40m^2. ¿Cuándo un cuadrado es distinto a otro?, si tengo un cuadrado de lado 2, ¿es igual a uno de lado 3?

  Comparen los valores de los lados de cada par de cuadrados. Si tenemos un cuadrado N de lado 2 y un cuadrado M de lado 6, y encontramos un cuadrado de lado 6 y un cuadrado M de lado 2, ¿podemos establecer alguna relación entre los valores de sus lados?
- **c)** ¿Qué ocurre si el lado del cuadrado N mide 8 metros? ¿Cuánto mide el lado del cuadrado M? ¿Se cumple lo que Raúl desea hacer con su parcela? ¿Por qué?
- **d)** Entre 3 y 4 metros, supongamos que n toma el valor 3,5 entonces ¿cuál es el valor para el lado m?, ¿cuál es el área sombreada?, ¿es única?
- **e)** Si el valor del lado n aumenta, ¿cómo se comporta el área sombreada? (Leerlo a

través de la tabla de valores).

f) Si el lado de la parcela mide 8 metros y el lado n mide 1, ¿cuánto mide el lado m? ¿podemos escribirlo en función del lado n?

g) Como el lado de la parcela mide 8 metros, entonces su área es de 64 metros cuadrados. Es decir que si sumo el área sombreada con el área blanca obtengo el área total (64), por lo tanto: (8-n)^2+n^2 +2.[(8-n).n]=64

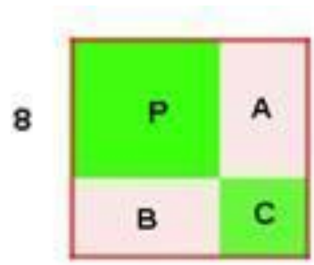
¿Es posible que la suma de todos esos términos me de un número?, comprobarlo.

Conclusiones

- Hemos hallado una expresión que representa el área sombreada en función del lado p es decir: AS=p^2 + (8-p) ^2, donde AS significa área sombreada.
- Analizamos cómo varía el área sombreada en función del lado p. Por momentos el área sombreada decrece hasta cierto valor numérico y luego crece. Este valor numérico es 32 y es un mínimo.
- Cuando p=2, el área sombreada es de 40m^2 pero también se encontró otro valor de p=6 para el cual el área sombreada es la misma. Esto quiere decir que encontramos dos valores para los cuales el área sombreada es la misma.

Actividad 2. El problema del gallinero de Raúl (Parte 2)

Ya ayudamos al hombre de campo a averiguar cuánto miden los lados de los gallineros para que ocupen el menor espacio posible.



Ahora, Raúl se pone a analizar la parte de la parcela que quedó sin usar – la parte blanca -. Se hizo un esquema y llamó A al sector a la derecha del gallinero P y B al sector a la izquierda del gallinero C. Raúl necesita saber cuánto miden los lados de cada gallinero para que la parte blanca sea lo más grande posible.

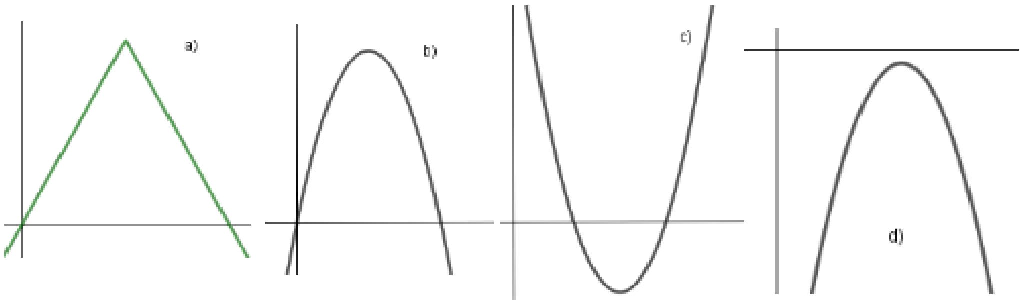
1. Completá la tabla con los valores que corresponden a las áreas de los sectores A y B.

Lado p	Lado c	Área de A	Área de B	Área blanca
1	7			14
2	6			24
3	5			30
4	4			32
5	3			30
6	2			24
7	1			14

2. Responder:

a) ¿Habrá algún valor del lado p para el cual el área blanca sea mayor a $32m^2$? Si existe indicar el valor de p; si te parece que no se puede encontrar otro valor de p, explica por qué.

b) Decidir cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la representación del área blanca en función de la medida del lado p. Explicar el porqué de la elección y el porqué del descarte.



c) ¿Cómo es el área del sector A con respecto al área del sector B cuando p toma valores del 1 al 7? ¿Cómo es el área blanca con respecto al área del sector A cuando p toma valores del 1 al 7? ¿y con respecto al sector B?

d) Escribí una fórmula que represente el área blanca a partir de la medida del lado p.

Posibles resoluciones de los alumnos

1) *Posible resolución*

Lado p	Lado c	Área de A	Área de B	Área blanca
1	7	7	7	14
2	6	12	12	24
3	5	15	15	30
4	4	16	16	32
5	3	15	15	30
6	2	12	12	24
7	1	7	7	14

2) a) *Posible resolución:*

Cuando el lado p vale 4,5 m, el lado c vale 3,5 m entonces el área blanca es de 31,5 m^2, es decir que es menor a 32m^2. Si el lado p es de 5 m entonces el lado c es de 3 m y el área blanca resulta ser de 30 m ^2 y sigue siendo un valor menor a 32 m^2, entonces no existe otro valor de p para el cual el área blanca sea mayor a 32 m^2.

2) b) *Posible resoluciones:*

1) El gráfico c) y d) no corresponden porque allí el área toma valores negativos y esto no puede ser posible ya que en el cuadro toma valores positivos.

2) Es el gráfico a) porque crece hasta un pico y después baja.

3) El gráfico a) no es porque el valor 30 del área blanca está muy cerca del valor 32. Los gráficos c) y d) tampoco son porque el área no es negativa, entonces es el gráfico b).

2) c) *Posible resolución:*

El área del sector A y del sector B son iguales. El área blanca es el doble del área del sector A, pero como el área del sector A es igual al área del sector B entonces el área blanca es el doble del área del sector B.

2) d) *Posible resoluciones:*

Área blanca= 8p -p.p +8p -p.p

Área blanca= 64- p.p - (8-p).(8-p)

Intervenciones docentes

1) Si el lado p vale 1 m entonces el lado c vale 7 m, ¿cuáles son son valores del lado del sector A? ¿qué forma tiene este sector? ¿cómo se le calcula el área a ese tipo de sectores?
2) b) Supongamos que el valor del lado p vale 4,5 m, ¿cuánto vale el lado c? ¿cuál es el valor del área blanca para esos lados? ¿cómo es con respecto al área de 32 m^2? ¿y si el valor del lado p es de 4,9m?

   c) A medida que los valores del lado p aumentan, ¿cómo se comportan los valores del área blanca? ¿qué ocurre?

   d) Si analizamos los valores que toma el área blanca con respecto a los valores del área del sector A, ¿qué podemos decir? ¿ocurre lo mismo si comparamos los valores del área blanca con los del sector B?

Conclusiones

- Analizando los valores que toma el área blanca en función del lado p, notamos que crecen hasta cierto valor numérico y luego decrecen, pero no lo hacen de manera uniforme, es decir siempre al mismo ritmo.
- El valor más grande del área blanca es 32m^2, es un **valor máximo** que corresponde al par ordenado (4;32).
- Además, encontramos un solo valor de p para el cual el área blanca es 32m^2 y para los demás casos de p, como en el caso del área blanca igual 40m^2 hay dos compañeros, es decir p=2 y p=6. Entonces el valor $32m^2$es el único que no se repite, por lo tanto el valor máximo es único.

Actividad 3. El microemprendimiento de los técnicos (Parte 1)

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un microemprendimiento como técnicos de computadoras. Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula, que permite calcular la ganancia mensual a partir del precio por hora.

y = -2. (x-80)^2 + 3200

a) Supongamos que Miguel y Ernesto están de acuerdo en cobrar 50$por hora, ¿qué ganancia obtendrían?, ¿y si cobrarán 60$ por hora?

b) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia de 1400$?. Y para obtener una ganancia de 2400$, ¿habrá otro valor de precio por hora?

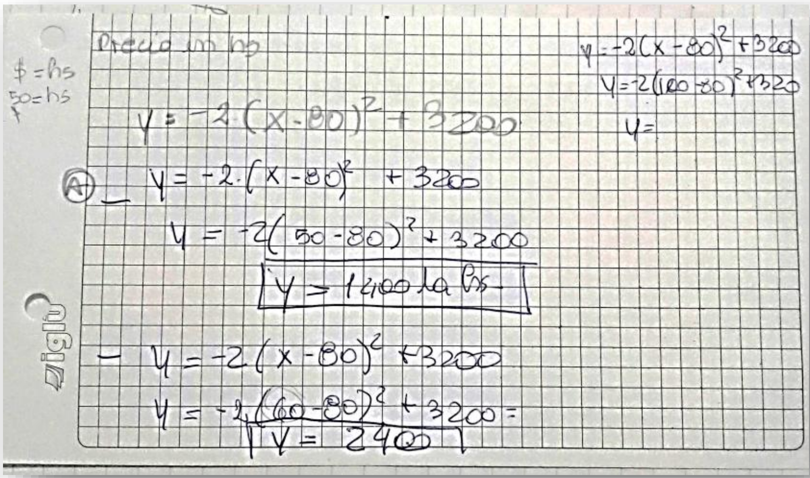
c) Supongamos que Miguel y Ernesto quieren ganar más de 2400$, ¿a qué precio podrían cobrar la hora?

d) ¿A qué precio por hora no se obtendría ganancia alguna?, ¿habrá otro precio por hora con el cual no se obtenga ganancia?

e) Representar en un plano cartesiano cada solución encontrada en los apartados anteriores.

Posibles respuestas de los alumnos

a) *Posible respuesta 1*:

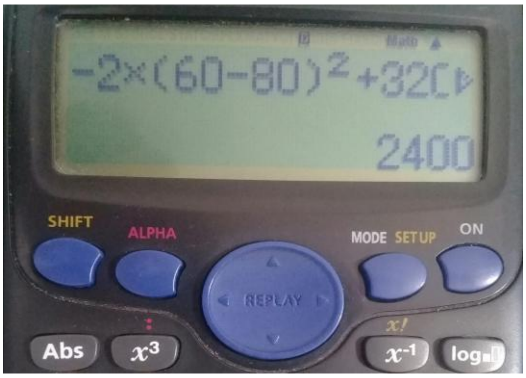


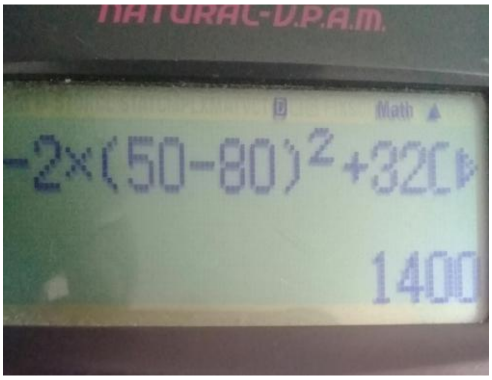
Rta:

Si cobran 50$ la hora obtienen una ganancia de 1400$.

Si cobran 60$ por hora obtienen una ganancia de 2400$.

Posible respuesta 2:



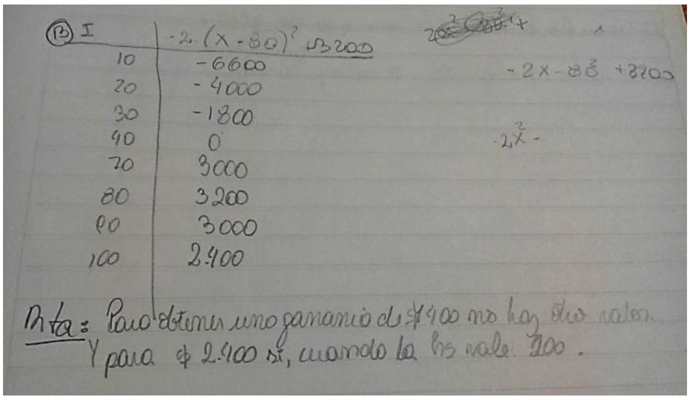


b) *Posible respuesta 1:*

Si se cobra 50$ entonces se obtiene una ganancia de 1400$.

Si cobran un precio por hora de 60$ ganan 2400$.

Posible respuesta 2:



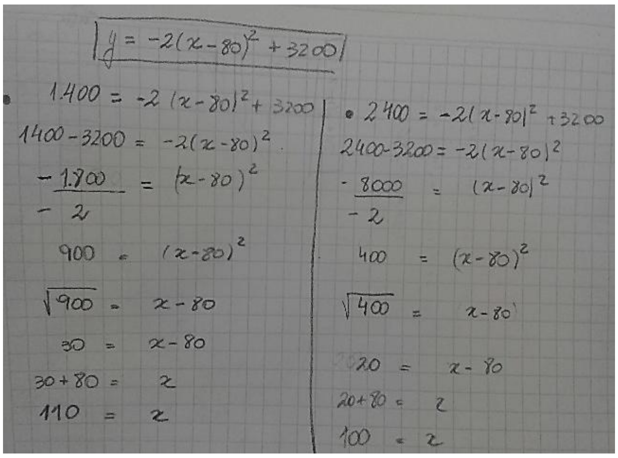
I	$-2.(x-80)^2+3200$
10	-6600
20	-4000
30	-1800
40	0
70	3000
80	3200
90	3000
100	2400

Rta: Para obtener una ganancia de $1400 no hay otro valor.
Y para $ 2.400 sí, cuando la hs vale 100.

Posible respuesta 3:

Hay otro precio por hora y es de 110$.

Hay otro precio por hora y es de 100$.



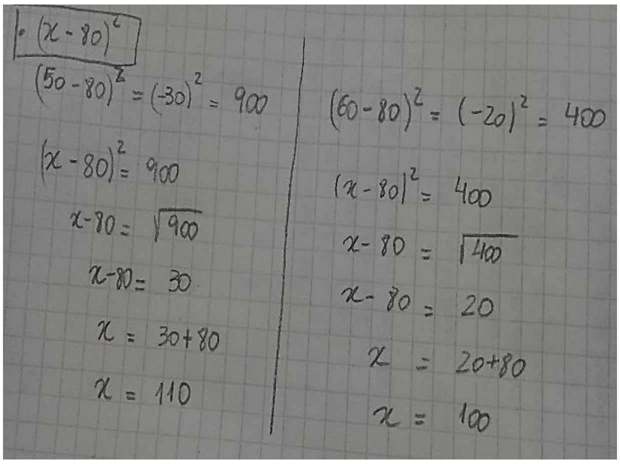
$\boxed{y = -2(x-80)^2+3200}$

$1.400 = -2(x-80)^2+3200$
$1400-3200 = -2(x-80)^2$
$\frac{-1.800}{-2} = (x-80)^2$
$900 = (x-80)^2$
$\sqrt{900} = x-80$
$30 = x-80$
$30+80 = x$
$110 = x$

$2400 = -2(x-80)^2+3200$
$2400-3200 = -2(x-80)^2$
$\frac{-8000}{-2} = (x-80)^2$
$400 = (x-80)^2$
$\sqrt{400} = x-80$
$20 = x-80$
$20+80 = x$
$100 = x$

Posible respuesta 4:

Si se cobra 50$ la hora se obtiene una ganancia de 1400$. Si se cobra 110$ la hora se obtiene una ganancia de 1400$. Si se cobra 60$ la hora se obtiene una ganancia de 2400$. Si se cobra 100$ la hora se obtiene una ganancia de 2400$.

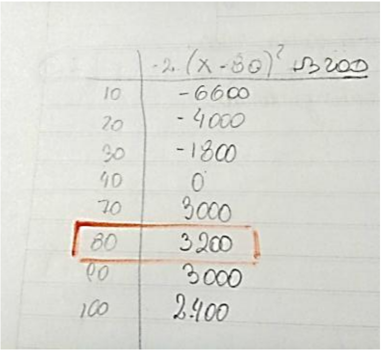


$\boxed{(x-80)^2}$

$(50-80)^2 = (-30)^2 = 900$
$(x-80)^2 = 900$
$x-80 = \sqrt{900}$
$x-80 = 30$
$x = 30+80$
$x = 110$

$(60-80)^2 = (-20)^2 = 400$
$(x-80)^2 = 400$
$x-80 = \sqrt{400}$
$x-80 = 20$
$x = 20+80$
$x = 100$

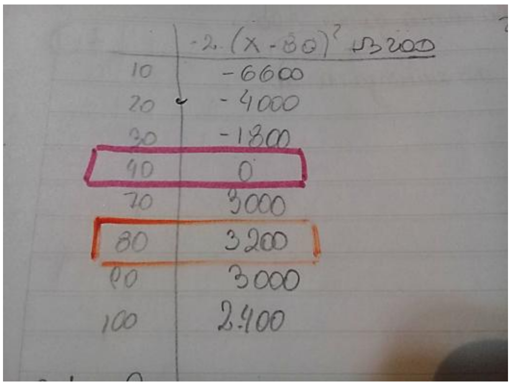
c) *Posible respuesta:*



	$-2.(x-80)^2+3200$
10	-6600
20	-4000
30	-1800
40	0
70	3000
80	3200
90	3000
100	2.400

Rta: si la hora la cobran 80$ van a ganar 3200$.

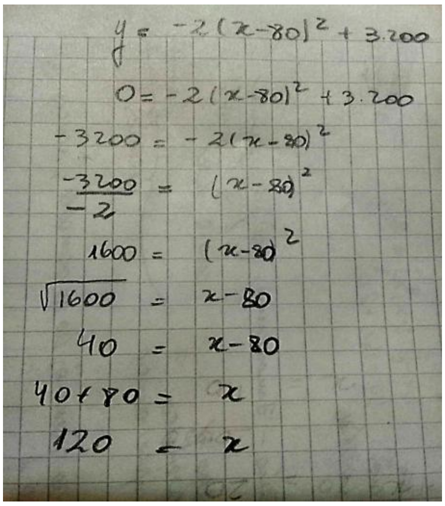
d) *Posible respuesta 1:*



	$-2.(x-80)^2+3200$
10	-6600
20	-4000
30	-1800
40	0
70	3000
80	3200
90	3000
100	2.400

Rta: si la hora la cobran 40$ no obtienen ganancia.

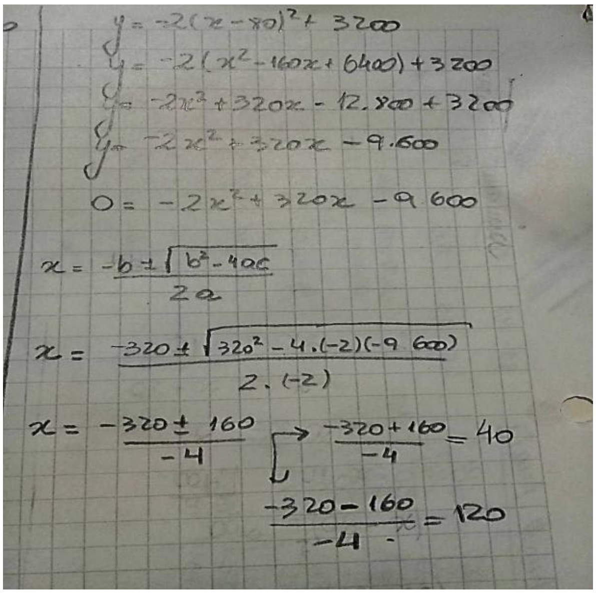
Posible respuesta 2:



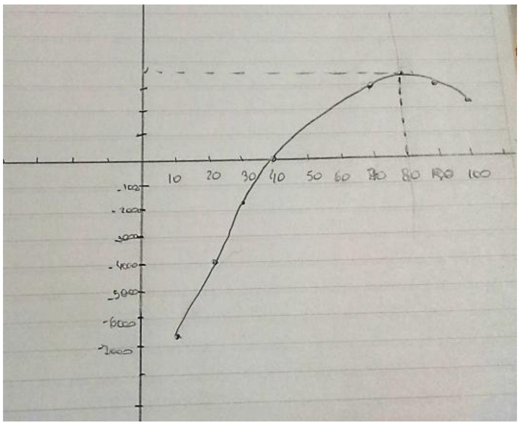
$$y = -2(x-80)^2 + 3.200$$
$$0 = -2(x-80)^2 + 3.200$$
$$-3200 = -2(x-80)^2$$
$$\frac{-3200}{-2} = (x-80)^2$$
$$1600 = (x-80)^2$$
$$\sqrt{1600} = x-80$$
$$40 = x-80$$
$$40+80 = x$$
$$120 = x$$

Rta: cobrando la hora a $120 no se obtiene ganancia.

Posible respuesta 3:



e) *Posible respuesta:*



Rta: Opción 4. La ganancia aumenta a partir de que el precio aumenta. Pero llega un punto donde la ganancia aumenta y el precio disminuye.

Intervenciones docentes

Con respecto al enunciado

Presento la forma de trabajo: Se les pide a los alumnos que formen grupos de 3 personas como mínimo y se les aclara que los incisos de la actividad se irán trabajando grupalmente y que cuando finalicen el apartado a) , se analizarán de forma oral las posibles resoluciones y así sucesivamente para los demás apartados.

Luego se pide que alguien lea el problema. Una vez leída la situación problemática, se procede a explicar el contexto de la misma: El amigo economista presentó esa fórmula como la manera de calcular la ganancia que se obtendrá de acuerdo al precio por hora de cobro. Este amigo tuvo en cuenta diferentes factores, es decir que la ganancia se calcula a partir de ciertos elementos tales como la cantidad de clientes, que dependerá del precio que se cobre por hora, ¿se tendrá más clientes si se cobra menos por hora?, o ¿se tendrán menos clientes si se cobra mucho más por hora?
También se tiene en cuenta los gastos fijos tales como luz, alquiler, etc. Finalmente, el amigo economista construyó esa fórmula teniendo en cuenta todos estos agentes, aunque solamente plasmó en ella el precio que se cobra por hora.

Con respecto a los incisos

a) Procedo a anotar en el pizarrón las respuestas de los alumnos y luego les pregunto, ¿cómo lo resolvieron? (La intención de esta pregunta es lograr identificar las variables que se ponen en juego, es decir lo que ellas significan, ya que supongo que reemplazaron los precios dados en el lugar de la x). Suponiendo que esto sea una posible resolución por parte de los alumnos, les re pregunto, ¿por qué hicieron eso?, ¿qué significa reemplazar el valor de la x por 60? Más tarde se anotan en un costado del pizarrón los pares ordenados obtenidos para trabajar con ellos más adelante. Será necesario explicar por qué la respuesta se escribió en forma de par ordenado. Luego se dice que x es una variable que representa el precio que se cobra por hora mientras que y corresponde a la ganancia que se obtiene por cobrar determinado precio por hora.

b) En el apartado anterior se identificaron las variables y se escribieron los pares ordenados obtenidos, es decir que se calculó cierta ganancia a partir de un precio por hora dado, ahora les pregunto, ¿qué datos tengo y cuáles desconozco?, en el apartado a) ¿qué datos teníamos y cuáles desconocíamos? ¿estamos trabajando de la misma manera? (Se pretende que los alumnos logren identificar los diferentes procesos que se dan en el apartado *a)*, en el primero buscamos ganancia a través de un precio mientras que en el segundo buscamos precio para la misma ganancia.

Con respecto a una segunda respuesta, les haría analizar a través de una tabla de valores cómo varía la ganancia a medida que el precio por hora aumenta con preguntas tales como: ¿qué ocurre intuitivamente con la ganancia cuando se cobra más por hora?, ¿y cuando se cobra menos?

Si reemplazan en y por el valor de la ganancia y despejan x, le pediría a algún alumno que pase al frente a explicar cómo lo resolvió. En algún momento se caerá en un mal manejo de pasaje con expresiones algebraicas como *"el -2 está multiplicando, pasa dividiendo cambiado de signo",* aquí intervendría explicando cómo se procede al realizar este pasaje y mostrándole algún contraejemplo). También imagino que cuando calculen la raíz de un número ponen un único resultado, que justamente es el que buscan. Por ejemplo, supongamos que llegan a una expresión de la forma "raíz de 900 igual a x menos 80", entonces usan la calculadora para sacar la raíz de 900 y les da 30, a este le suman 80 y obtienen 110, concluyen que otro precio por hora para ganar 1400$ es de 110$. Para ver si estos cálculos son correctos, se procede a realizar la verificación en el pizarrón. Acá me detengo a explicar por qué (110-80)^2=(50-80)^2, es decir por qué se cumple que (30)^2=(-30)^2 *¿Cómo es posible que un número elevado al cuadrado me dé lo mismo que si elevo al cuadrado dicho número pero cambiado de signo?.* Se trabajará como el término (-30)^2 a través de la regla de los signos y lo que significa elevar un número al cuadrado.

Una vez que se hacen estas verificaciones, se pregunta: ¿entonces es posible ganar la misma cantidad de dinero para dos precios de cobro distinto? ¿cuál creen que el cliente elegiría y por qué? ¿cuál precio por hora les conviene cobrar a Miguel y Ernesto? ¿les da lo mismo cobrar cualquiera de los dos? ¿por qué?

Hablar sobre algunas de las conclusiones que se construyeron en el apartado *b)*: *"Cuando el precio de cobro aumenta, la ganancia aumenta pero llega un punto donde la ganancia disminuye aunque el precio por hora siga aumentando". "Existen valores de precios por hora diferentes de los cuales obtenemos las mismas ganancias".* (Se utilizan las conclusiones más asociadas al comportamiento de la función).

c) ¿Cuánto deberían cobrar por hora para ganar más de $2400?, propongan diferentes valores de precio por hora para determinar dicha ganancia. De todos los grupos, ¿quién encontró el valor de ganancia más grande? ¿para qué precio por hora ocurre esto? Se procede a anotar en el pizarrón mediante una tabla de valores los resultados obtenidos por los diferentes grupos y se debate entre todos ellos cuál es el precio que Miguel y Ernesto deben cobrar por hora para ganar más dinero, sin perder de vista el valor de tal ganancia. Dentro del debate, se analizarán las ganancias encontradas mediante un proceso de comparación entre ellas con el fin de hallar la "más grande" siempre vinculándola al precio por hora que se cobraría.

Se retoma el concepto de par ordenado, "*lo que hicimos fue buscar un precio por hora (x=80$) para el cual se obtendrá una mayor ganancia (y=3200$), entonces obtuvimos un punto (80;3200) de la función y*".

Una vez hallado el precio por hora y su respectiva ganancia máxima, se anota dicha información a un costado del pizarrón, esto se escribe en forma de par ordenado. Luego se continúa con el proceso de comparación pero esta vez entre la función y dada inicialmente y el par ordenado tal (80;3200). Se les pregunta, ¿qué relación podemos establecer entre ellos? Se pide que se escriba la relación y se anota tal par ordenado en el pizarrón para trabajar con él más tarde.

d) Quizás en algún momento resolviendo los apartados anteriores, algunos alumnos hayan encontrado algún valor del precio por hora para el cual la ganancia les dió cero. Antes les preguntaría, ¿qué significa *"no obtener ganancia"*? ¿cuándo no se obtiene ganancia?

Con respecto al reemplazo de la variable y por 0, se interviene de la misma manera que se hizo en el apartado *b)* ya que el procedimiento es el mismo, la diferencia está en que ahora estamos trabajando con otro valor de ganancia distinto.

Una vez hallado los valores de precio por hora para los cuales no se obtiene ganancia, se escriben dichos resultados en un costado del pizarrón. Se les puede preguntar, *¿qué sentido tendría que a pesar de cobrar $40 o $120 por hora, la ganancia sea 0? ¿Cuál precio por hora les conviene cobrar a Miguel y Ernesto? ¿les da lo mismo cobrar cualquiera de los dos? ¿por qué? ¿Cuál precio creen que el cliente elegiría y por qué?*

e) Con el trabajo que se realizó en los apartados anteriores, se han reunido las soluciones encontradas para cada uno de ellos, quedando plasmadas en el pizarrón en forma de par ordenado. Ahora, se les pide a los grupos que representen todos esos puntos en un plano cartesiano. Se retoman las conclusiones a la que se llegaron en apartados anteriores, siempre vinculando y no perdiendo de vista la fórmula y el gráfico. Por esto no creo que se presente dificultad alguna para representar puntos en el plano luego unirlos y obtener una representación de la función (a partir de construcciones anteriores que fueron validadas).

Conclusiones

- La fórmula propuesta tiene la forma f(x)=a(x-h) +k para a distinto de cero y se la denomina función cuadrática con vértice en (h, k).
- La mayor ganancia es de 3200$ para un precio por hora de 80$, entonces el punto (80;3200) es un máximo.

Actividad 3 (Parte 2)

Imaginemos la siguiente situación:

Por el momento, la puesta en marcha del micro-emprendimiento rendía sus frutos. Miguel y Ernesto están satisfechos con la fórmula que su amigo propuso, ya que les ayudó a decidir qué precio cobrar por hora para ganar mucho dinero.

Con el transcurrir de los días, la situación comenzaba a ponerse difícil, ya que los precios de los repuestos para las computadoras y el alquiler por mes aumentaron. Esto provocó más gastos y por lo tanto una disminución de las ganancias. Debido a este cambio, Miguel y Ernesto deciden llamar nuevamente a su amigo economista para que les ayude a averiguar en qué casos se pierde dinero y cuánto. Este amigo tiene en cuenta los aumentos de servicios y materiales de trabajo. Así le propone una nueva fórmula que permite calcular la *ganancia mensual* a partir del *precio que se cobrará por hora*.

y= 2(x-170) ^2-200

Ayudemos a Miguel y a Ernesto a averiguar lo que desean respondiendo lo siguiente:

a) Supongamos que la hora se paga $50, ¿cuánto dinero se obtendría como ganancia mensual? ¿y si se cobran 60$ por hora?

b) ¿Habrá otro precio por hora con el cual se pueda obtener 28.600$ de ganancia mensual? ¿Cuánto habría que cobrar la hora para obtener 24.000 $ de ganancia mensual? ¿habrá otro valor de precio por hora para obtener esa misma ganancia?

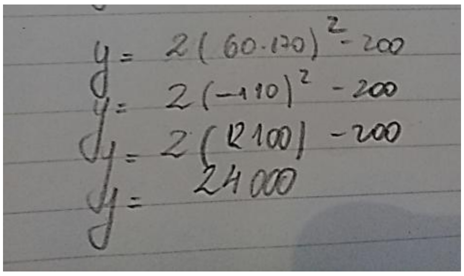
c) Haciendo los cálculos para averiguar qué precio se cobrará por hora, los emprendedores se encontraron con una situación donde se pierde dinero en ese mes. ¿Qué cálculos habrán realizado?

d) Miguel y Ernesto afirman que tienen que tener cuidado porque si cobran un cierto valor por hora se quedan sin ganancias en ese mes. Es más, dicen que se encontraron con esta situación en más de un caso mientras hacían cuentas de cuánto se podría cobrar la hora. ¿Qué cálculos habrán realizado? ¿Será posible?

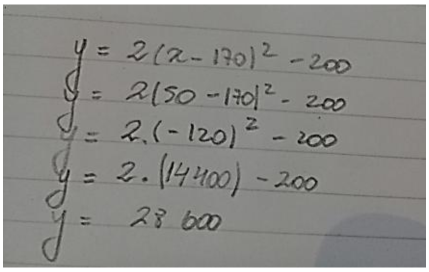
e) Representar en un plano cartesiano la gráfica que contiene las soluciones encontradas.

Posibles resoluciones de los alumnos

a) Posible resolución

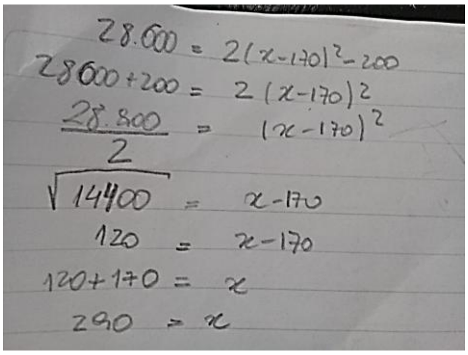


$$y = 2(60-170)^2 - 200$$
$$y = 2(-110)^2 - 200$$
$$y = 2(12100) - 200$$
$$y = 24000$$

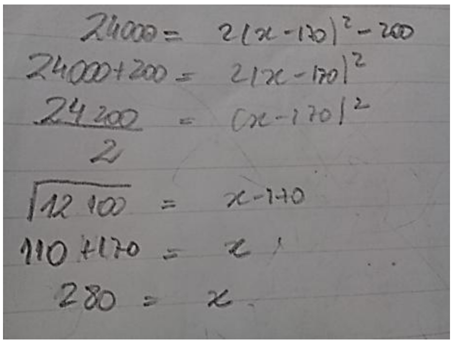


$$y = 2(x-170)^2 - 200$$
$$y = 2(50-170)^2 - 200$$
$$y = 2.(-120)^2 - 200$$
$$y = 2.(14400) - 200$$
$$y = 28\,600$$

b) Posible resolución

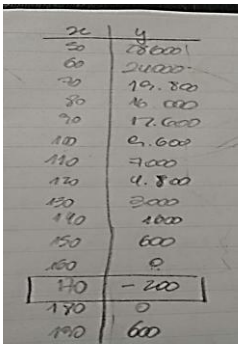


$$28.600 = 2(x-170)^2 - 200$$
$$28600 + 200 = 2(x-170)^2$$
$$\frac{28.800}{2} = (x-170)^2$$
$$\sqrt{14400} = x-170$$
$$120 = x-170$$
$$120+170 = x$$
$$290 = x$$



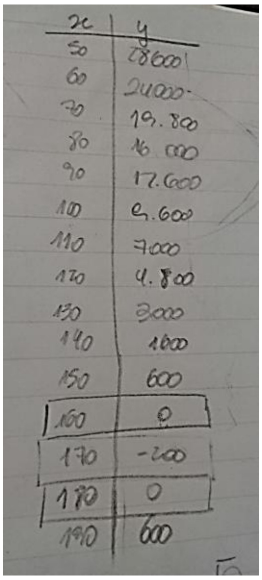
$$24000 = 2(x-170)^2 - 200$$
$$24000+200 = 2(x-170)^2$$
$$\frac{24\,200}{2} = (x-170)^2$$
$$\sqrt{12\,100} = x-170$$
$$110+170 = x$$
$$280 = x$$

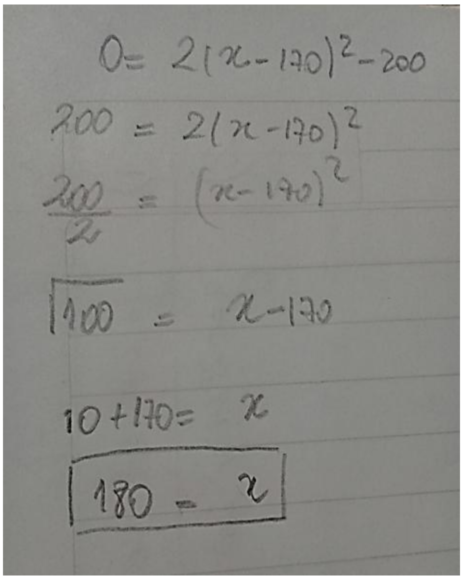
c) Posible resolución



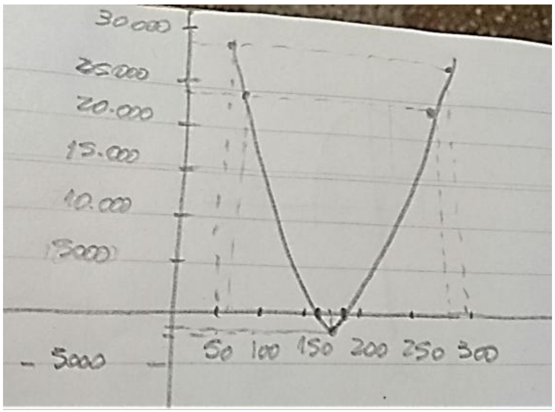
x	y
50	28600
60	24000
70	19.800
80	16 000
90	12.600
100	9.600
110	7000
120	4.800
130	3000
140	1000
150	600
160	0
$\boxed{170}$	$\boxed{-200}$
180	0
190	600

d) Posibles resoluciones 1y 2





e) Posible resolución



Intervenciones docente

Con respecto al enunciado:

Los emprendedores comenzaron a notar pérdidas de dinero debido al aumento del precio del alquiler y algunos insumos necesarios para el trabajo. A partir de ello, acuden nuevamente a su amigo economista de tal forma que los ayude a averiguar en qué casos se pierde dinero y cuánto. El amigo tuvo en cuenta los aumentos de los servicios y repuestos necesarios, entonces les propuso una fórmula que dé cuenta de ello.

Con respecto a los incisos:

a) ¿Qué significa esa fórmula? ¿qué representa y? ¿qué representa x? ¿qué datos tenemos y cuál hay que hallar?

b) ¿Qué ocurre ahora? ¿qué datos tenemos y cuál o cuáles hay que hallar? ¿será posible?

c) Mirando la fórmula, a la expresión 2.(x-170)^2 le estamos quitando 200$. ¿cuánto tiene que valer esa expresión de tal manera que si le quito 200$ pierdo dinero?

d) Mirando la fórmula, a la expresión 2.(x-170)^2 le estamos quitando 200$. ¿cuánto tiene que valer esa expresión de tal manera que si le quito 200$ me quedo sin ganancia mensual?

e) ¿Qué escala podemos usar para ubicar los precios de cobro por hora? ¿Qué escala podemos usar para ubicar las ganancias mensuales? Para un precio de cobro de $50 ¿qué ganancia obtuvimos? ¿cómo podemos representarlo?

Conclusiones:

Para este caso a=2, h=170 y k= -200 y además se halló una pérdida de 200$ para un precio por hora de 170$, entonces el punto (170; -200) es un mínimo.

Actividad 4

Dadas las siguientes funciones y gráficos, hallar el vértice de cada una de ellas y relacionarlas con uno de los gráficos.

1) $y = 4(x+3)^2 - 1$

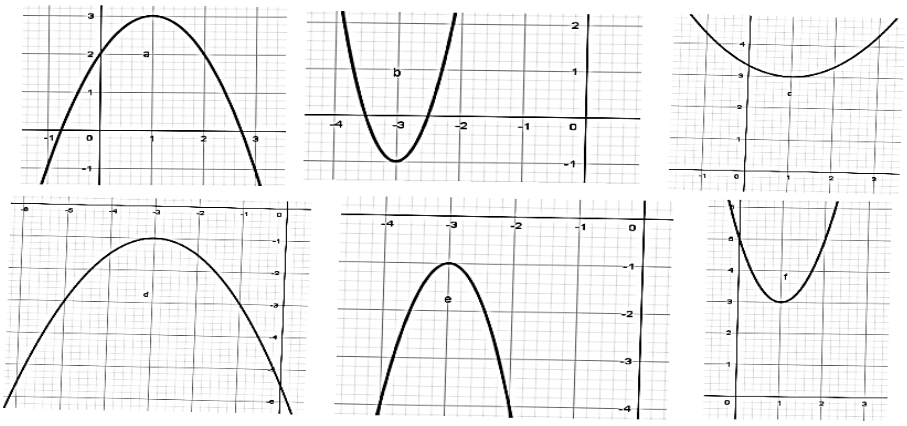
2) $y = -(x-1)^2 + 3$

3) $y = -3(x+3)^2 - 1$

4) $y = 2(x-1)^2 + 3$

5) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$

6) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$



Posibles resoluciones de los alumnos

Posible resolución 1

1) (-3; -1)

2) (1;3)

3) (-3; -1)

4) (1;3)

5) (-3; -1)

6) (1;3)

La función 1) puede asociarse con los gráficos d) f) y b) porque tienen el mismo vértice, pero como a es positivo la parábola abre hacia arriba y existe un mínimo entonces descarto las gráficas d) y f) y me quedo con la b).

La función 2) puede asociarse a los gráficos a) c) y f) porque tienen el mismo vértice, pero como a es negativo la parábola abre hacia abajo y existe un máximo entonces descarto las gráficas c) y f) y me quedo con la a)

Posible resolución 2

1) (3; -1)

2) (-1;3)

3) (3; -1)

4) (-1;3)

5) (3; -1)

6) (-1;3)

La función 1) no puede asociarse a ningún gráfico ya que no hay alguno que tenga vértice (3; -1).

La función 2) no puede asociarse a ningún gráfico ya que no hay alguno que tenga vértice (-1;3).

Intervenciones docentes

¿Qué forma tienen esas funciones? ¿qué información me brinda cada una de ellas? ¿cómo puedo representarla?

Conclusiones:

- Cuando a es positivo, la parábola abre hacia arriba y el punto (h, k) es el punto más bajo, es decir un mínimo.
- Cuando a es negativo, la parábola abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto, es decir un máximo.

Actividad 5. ***Juego de las tarjetas***

El juego contiene 30 tarjetas. Cada una de ellas consta de la representación gráfica de funciones cuadráticas cuya expresión algebraica se desconoce. El objetivo del juego es asociar una función cuadrática dada con alguna de esas tarjetas.

Formar grupos de a lo sumo 5 personas y responder:

a) ¿Habrá alguna tarjeta que corresponda a la representación de la función f(x)= -½(x-1)^2 +4,5?,¿habrá otras? En el caso de que exista explicar por qué se seleccionó esa y no otra.

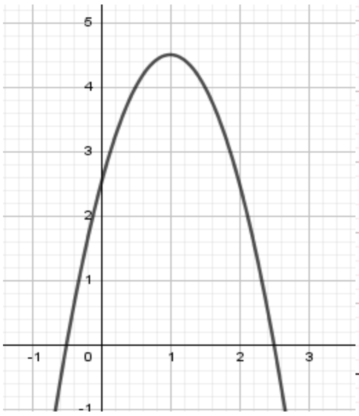
b) Si quisiéramos representar a la función f(x)=- ½x^2 +x+4 ¿habrá alguna tarjeta que corresponda a su representación? ¿habrá otras? En el caso de que exista explicar por qué se seleccionó esa y no otra.

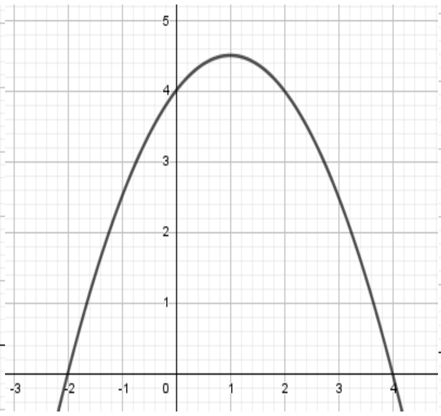
c) Y para representar la función f(x)= -1/2(x+2)(x-4), ¿existirá alguna tarjeta correspondiente a su gráfica?

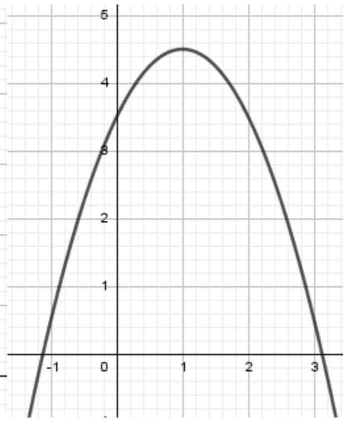
Posibles resoluciones de los alumnos

a) *Posible resolución 1*

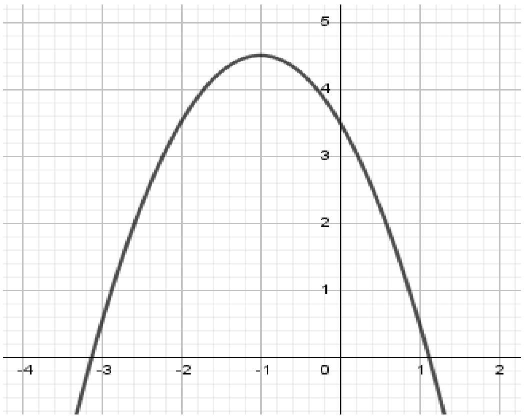
Como el vértice es (1;4,5) elegimos las tarjetas

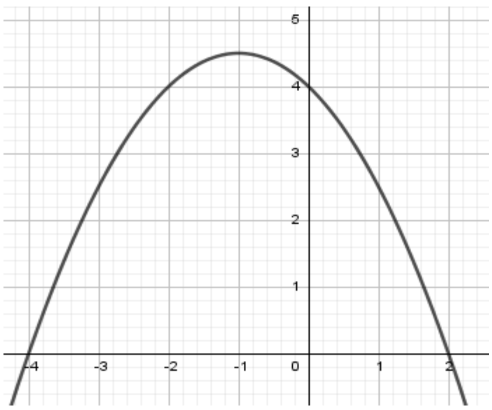






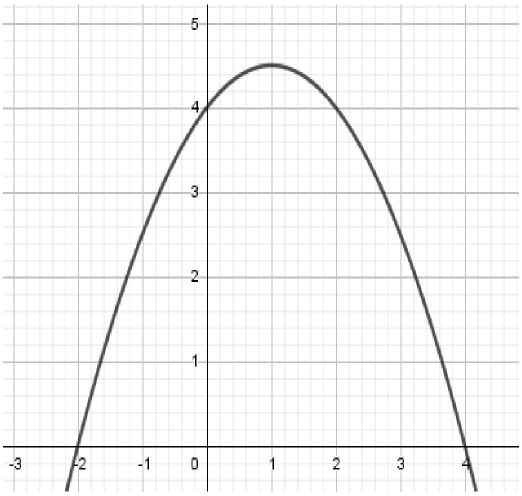
Posible resolución 2: Como el vértice es (-1;4,5) elegimos las tarjetas





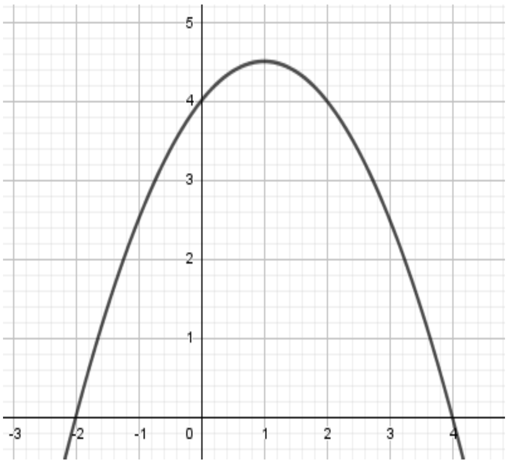
b) *Posible resolución 1*:

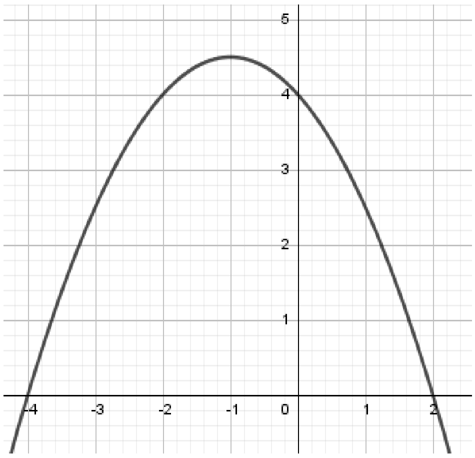
Como a vale -½, b es 1 y c es 4, las raíces son -2 y 4, entonces elegimos la tarjeta



Posible resolución 2:

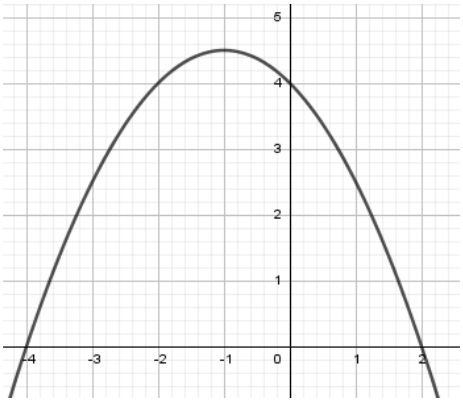
Como c vale 4 elegimos las tarjetas





c) *Posible resolución 1:*

Elegimos esta tarjeta porque la función indica los valores 2 y -4.



Intervenciones docentes

a) ¿Qué información nos brinda? ¿cómo podemos representarla?

b) ¿Qué información nos brinda? ¿qué datos podemos obtener con esa información? ¿cómo podemos representarla?

c) Supongamos que el valor de x es igual a 4 ¿cuál es el valor de y? ¿cómo puedo representarlos? ¿ese punto corta a alguna gráfica? - ¿Existirá alguna similitud con respecto a las funciones anteriores? En el caso que existan, ¿cuáles?

Conclusiones:

- La función f(x)= -½(x-1) ^2 +4,5 está escrita en forma canónica donde a vale -½ y el vértice es (1;4,5).
- La función f(x)=- ½x^2 +x+4 está escrita en forma polinómica donde a vale -½, b=1 y c o la ordenada al origen es igual a 4.
- La función f(x)= -1/2(x+2) (x-4) está escrita en forma factorizada, es decir f(x)=a(x-x1) (x-x2) donde a es el coeficiente principal y x1 junto con x2 representan las raíces de dicha función cuadrática, es decir x1=-2 y x2=4.
- La gráfica de esas funciones corresponde a una sola tarjeta, entonces son equivalentes, es decir representan el mismo gráfico, pero están escritas de diferente forma.

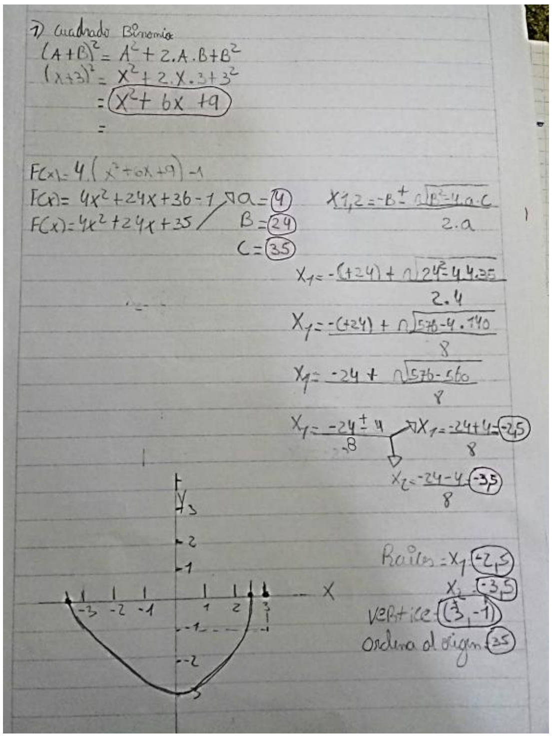
Actividad 6

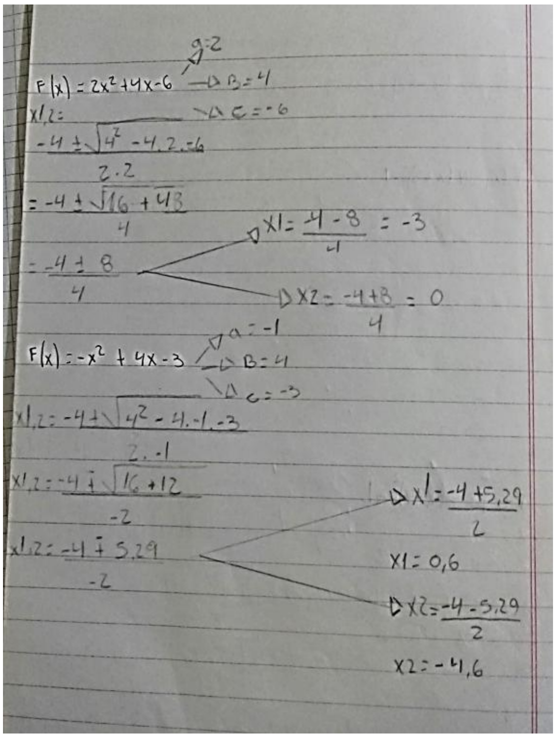
Para las siguientes fórmulas y en el caso de que sea posible, hallar el coeficiente cuadrático, ordenada al origen, raíces y vértice. Marcar con una cruz si el vértice es un máximo o un mínimo.

Fórmula	***Coeficiente cuadrático***	***Ordenada al origen***	***Vértice***	***Máximo***	***Mínimo***	***Raíces***
f(x)=4(x+3)²-1						
f(x)=-(x-4)²+1						
f(x)=2x²+4x-6						
f(x)=-x²+4x-3						
f(x)=x²-2x+2,5						
f(x)=-2x²+4x-3						
f(x)=3x²+6x+3						
f(x)=-2x²+4x-2						
f(x)=-3(x-2)(x-4)						
f(x)=(x-2)(x+3)						

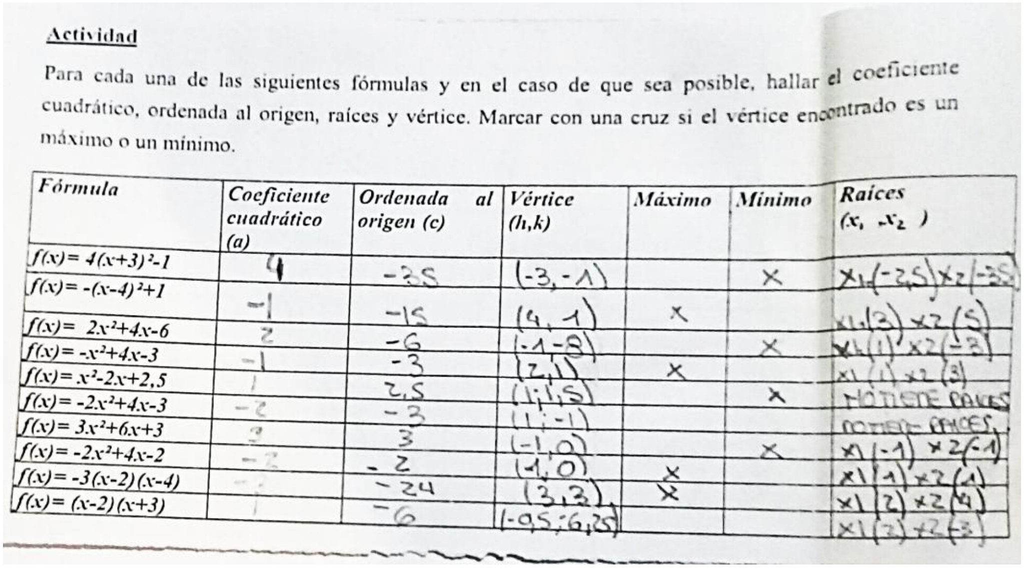
Posibles resoluciones de los alumnos

Posible resolución 1 y 2:





Posible resolución 3:



Actividad

Para cada una de las siguientes fórmulas y en el caso de que sea posible, hallar el coeficiente cuadrático, ordenada al origen, raíces y vértice. Marcar con una cruz si el vértice encontrado es un máximo o un mínimo.

Fórmula	Coeficiente cuadrático (a)	Ordenada al origen (c)	Vértice (h,k)	Máximo	Mínimo	Raíces (x_1, x_2)
$f(x)= 4(x+3)^2-1$	4	-35	(-3, -1)		x	x1(-2,5) x2(-3,5)
$f(x)= -(x-4)^2+1$	-1	-15	(4, 1)	x		x1(3) x2(5)
$f(x)= 2x^2+4x-6$	2	-6	(-1-8)		x	x1(1) x2(-3)
$f(x)= -x^2+4x-3$	-1	-3	(2,1)	x		x1 (1) x2 (3)
$f(x)= x^2-2x+2,5$	1	2,5	(1;1,5)		x	NO TIENE RAICES
$f(x)= -2x^2+4x-3$	-2	-3	(1;-1)			NO TIENE RAICES
$f(x)= 3x^2+6x+3$	3	3	(-1,0)		x	x1(-1) x2(-1)
$f(x)= -2x^2+4x-2$	-2	-2	(1,0)	x		x1(1) x2(1)
$f(x)= -3(x-2)(x-4)$	-3	-24	(3,3)	x		x1(2) x2(4)
$f(x)= (x-2)(x+3)$	1	-6	(-0,5;6,25)			x1(2) x2(-3)

Intervenciones docentes

¿Qué información me da la forma polinómica? ¿qué otros datos puedo encontrar con esa información? ¿qué es la ordenada al origen? ¿cómo puedo representarla?

¿Qué información me da la forma canónica? ¿qué son las raíces? ¿cómo puedo representarlas? ¿cómo puedo hallar sus raíces? ¿tendrá raíces? ¿cuándo no tiene raíces?

¿Qué información me describe la forma factorizada? ¿qué otros datos pueden hallar con esa información?

Conclusiones

Afiche en el que se ilustra el siguiente cuadro:

Forma de una función cuadrática	Información que me brinda
Canónica: f(x)=a(x-h)^2+k	a: coeficiente cuadrático Vértice: (h; k)
Polinómica: f(x)=ax^2+bx+c	a: coeficiente cuadrático b: coeficiente lineal c: ordenada al origen Vértice: (xv; yv) = (-b/2a; f(-b/2a))

	Raíces: *La fórmula cuadrática nos da dos soluciones de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0.$ *Que son* $x = x_1, x_2$, *donde* $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *y* $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$
Factorizada: f(x)=a(x-x1)(x-x2)	a: coeficiente cuadrático Raíces: x1 y x2.

Evaluaciones

Las siguientes actividades tiene la modalidad de ser trabajos prácticos entregables y con nota.

Actividad 3 (Parte 2)

Imaginemos la siguiente situación:

Por el momento la puesta en marcha del micro-emprendimiento rendía sus frutos. Miguel y Ernesto están satisfechos con la fórmula que su amigo propuso, ya que les ayudó a decidir qué precio cobrar por hora para ganar mucho dinero.

Con el transcurrir de los días, la situación comenzaba a ponerse difícil, ya que los precios de los repuestos para las computadoras y el alquiler por mes aumentaron. Esto provocó más gastos y por lo tanto una disminución de las ganancias. Debido a este cambio, Miguel y Ernesto deciden llamar nuevamente a su amigo economista para que les ayude a averiguar en qué casos se pierde dinero y cuánto. Este amigo tiene en cuenta los aumentos de servicios y materiales de trabajo. Así le propone una nueva fórmula que permite calcular la *ganancia mensual* a partir del *precio que se cobrará por hora*.

y = 2(x-170) ^2 -200

Ayudemos a Miguel y a Ernesto a averiguar lo que desean respondiendo lo siguiente:

f) Supongamos que la hora se paga $50, ¿cuánto dinero se obtendría como ganancia mensual? ¿y si se cobran 60$ por hora?

g) ¿Habrá otro precio por hora con el cual se pueda obtener 28.600$ de ganancia mensual? ¿Cuánto habría que cobrar la hora para obtener 24.000 $ de ganancia mensual? ¿habrá otro valor de precio por hora para obtener esa misma ganancia?

h) Haciendo los cálculos para averiguar qué precio se cobrará por hora, los emprendedores se encontraron con una situación donde se pierde dinero en ese mes. ¿Qué cálculos habrán realizado?

i) Miguel y Ernesto afirman que tienen que tener cuidado porque si cobran un cierto valor por hora se quedan sin ganancias en ese mes. Es más, dicen que se encontraron con esta situación en más de un caso mientras hacían cuentas de cuánto se podría cobrar la hora. ¿Qué cálculos habrán realizado? ¿Será posible?

j) Representar en un plano cartesiano la gráfica que contiene las soluciones encontradas.

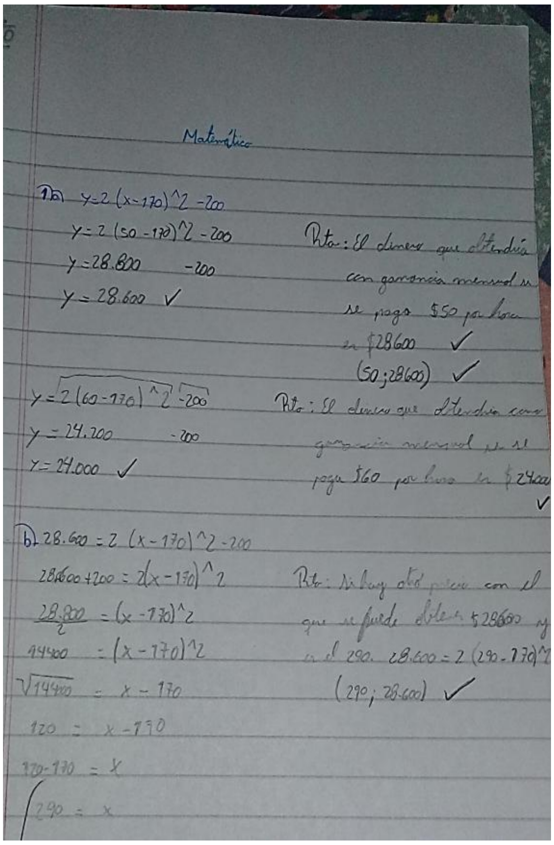
Actividad 6

Para cada una de las siguientes fórmulas y en el caso de que sea posible, hallar el coeficiente cuadrático, ordenada al origen, raíces y vértice. Marcar con una cruz si el vértice encontrado es un máximo o un mínimo.

Fórmula	***Coeficiente cuadrático***	***Ordenada al origen***	***Vértice***	***Máximo***	***Mínimo***	***Raíces***
$f(x)=4(x+3)^2-1$						
$f(x)=-(x-4)^2+1$						
$f(x)=2x^2+4x-6$						
$f(x)=-x^2+4x-3$						
$f(x)=x^2-2x+2,5$						
$f(x)=-2x^2+4x-3$						
$f(x)=3x^2+6x+3$						
$f(x)=-2x^2+4x-2$						
$f(x)=-3(x-2)(x-4)$						
$f(x)=(x-2)(x+3)$						

Producciones de los estudiantes con respecto a la Actividad 3 (parte 2)

Producción N°1:



Matemática

1a) y=2(x-170)^2-200
y=2(50-170)^2-200
y=28.800 -200
y=28.600 ✓

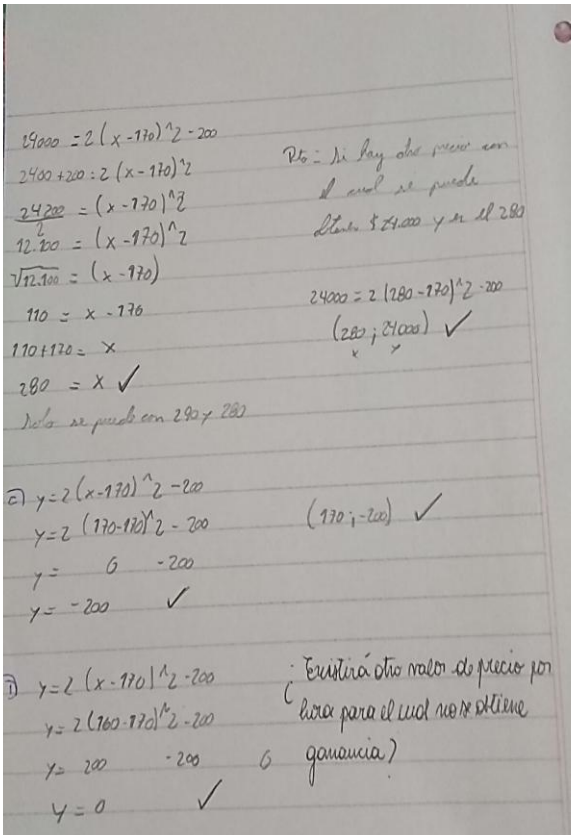
Rta: El dinero que obtendría con ganancia mensual si se paga $50 por hora es $28600 ✓
(50;28600) ✓

y=2(60-170)^2-200
y=24.200 -200
y=24.000 ✓

Rta: El dinero que obtendría con ganancia mensual si se paga $60 por hora es $24000 ✓

b) 28.600 = 2(x-170)^2-200
28600+200 = 2(x-170)^2
28.800/2 = (x-170)^2
14400 = (x-170)^2
√14400 = x-170
120 = x-170
120+170 = x
290 = x

Rta: Si hay otro precio con el que se puede obtener $28600 y es el 290. 28.600 = 2(290-170)^2
(290; 28.600) ✓



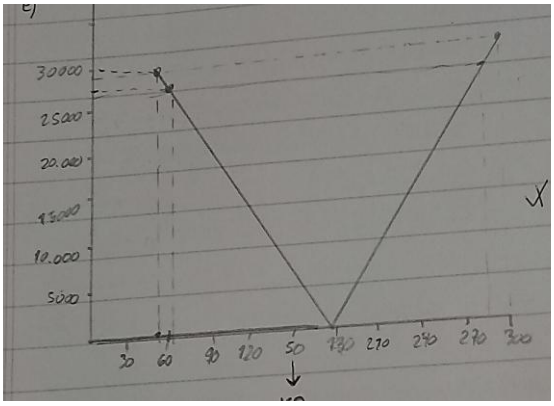
24000 = 2(x-170)^2-200
2400+200 : 2(x-170)^2
24200/2 = (x-170)^2
12.100 = (x-170)^2
√12.100 = (x-170)
110 = x-170
110+170 = x
280 = x ✓
Solo se puede con 290 y 280

Rta: Si hay otro precio con el cual se puede obtener $24.000 y es el 280
24000 = 2(280-170)^2-200
(280; 24000) ✓

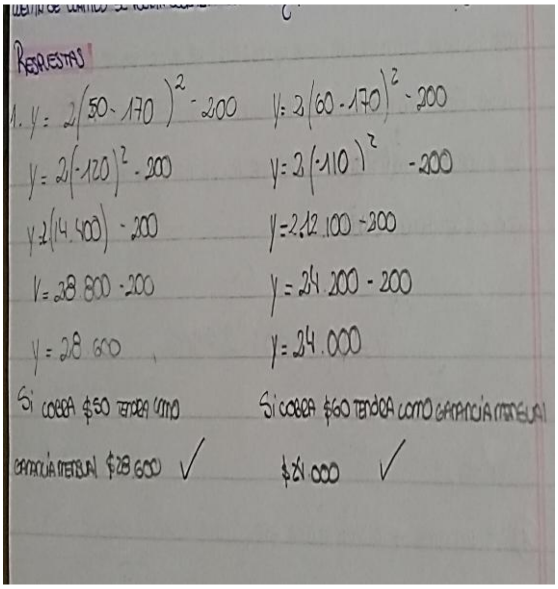
c) y=2(x-170)^2-200
y=2(170-170)^2-200
y= 0 -200
y= -200 ✓
(170;-200) ✓

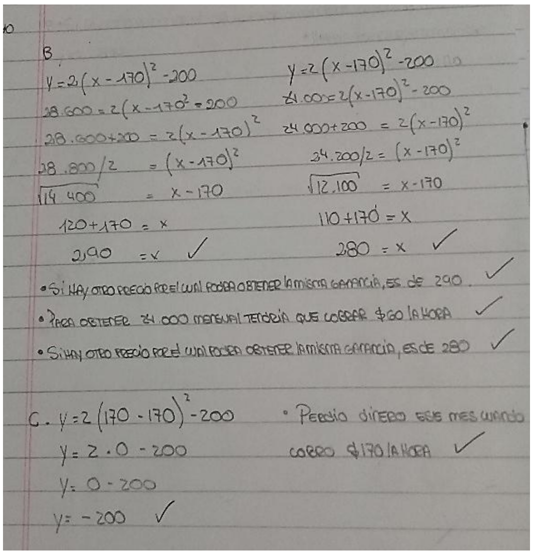
d) y=2(x-170)^2-200
y=2(160-170)^2-200
y= 200 -200
y=0 ✓

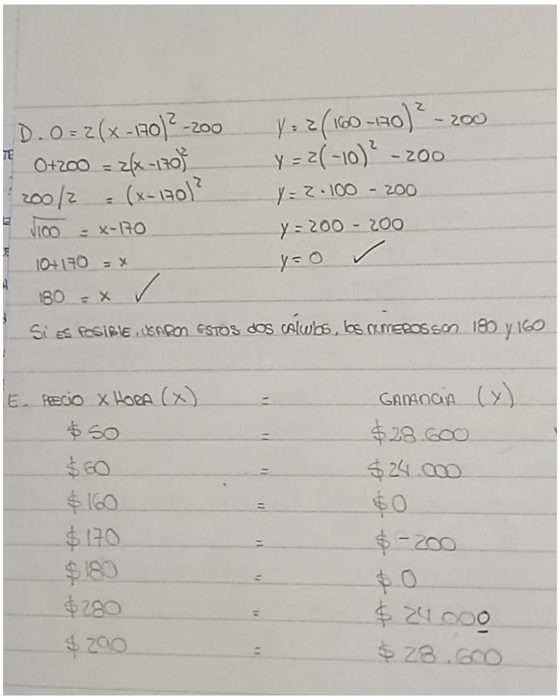
¿Existirá otro valor de precio por hora para el cual no se obtiene ganancia?

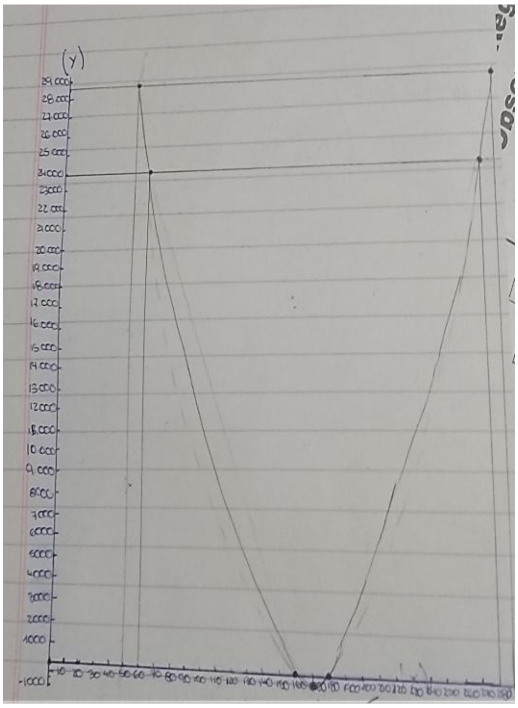


Producción N°2:

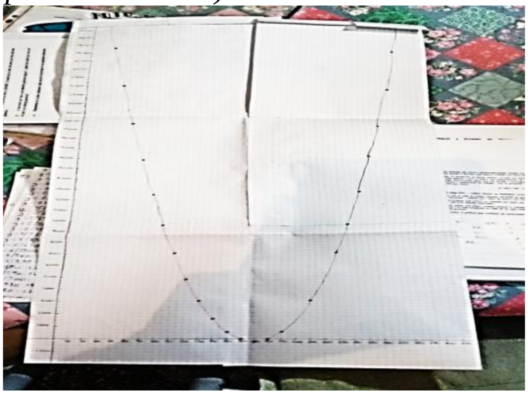




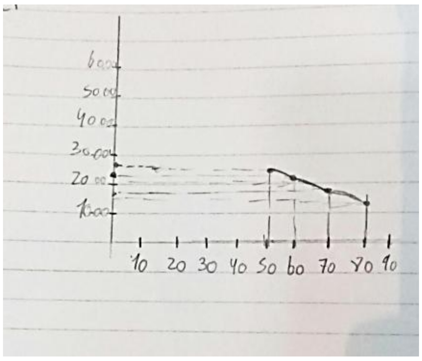




Producción N°3 con respecto al inciso e):



Producción N°4 con respecto al inciso e):



Análisis de las producciones de los alumnos

Producción N°1: La resolución está muy completa. Se realiza el desarrollo de cada inciso y se escribe su respectiva respuesta. Hay algunos pequeños detalles en cuanto al signo que toma un valor durante el desarrollo de la resolución de la ecuación. Cabe destacar la prolijidad y organización del trabajo. Falta mejorar la representación gráfica de la función cuadrática dada.

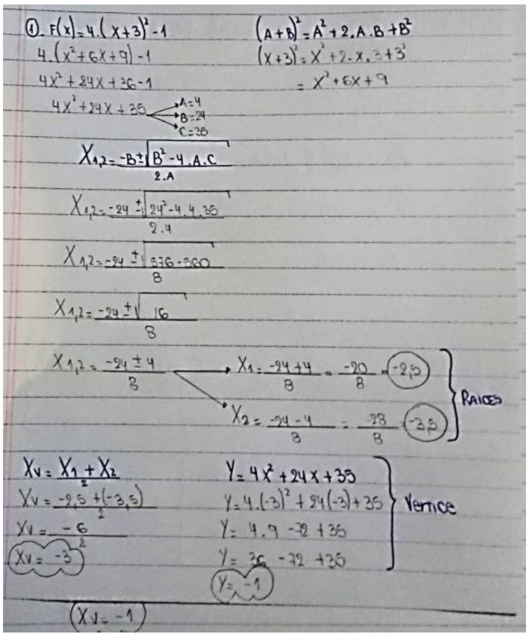
Producción N°2: La resolución está muy completa. Se realiza el desarrollo de cada inciso y se escribe su respectiva respuesta. El trabajo presenta orden y organización. La representación de la gráfica es muy buena.

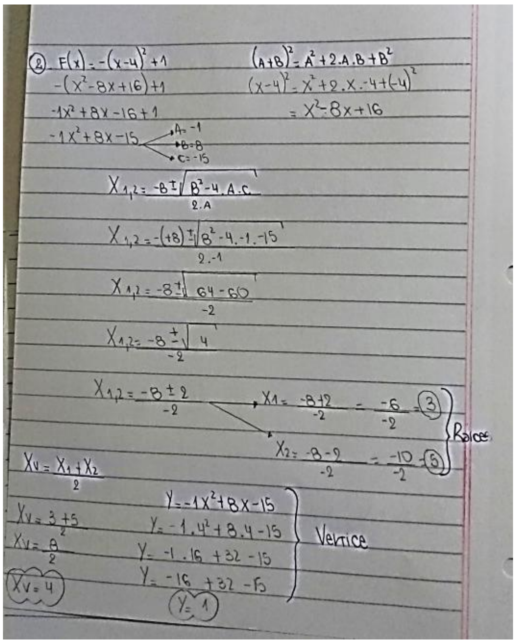
Producción N°3: De todas las producciones, esta es la más interesante ya que visualiza de manera muy atractiva la gráfica de la función sobre la que se trabaja. Se nota un gran esfuerzo por esbozar tal representación, la cual es la más acertada de todas.

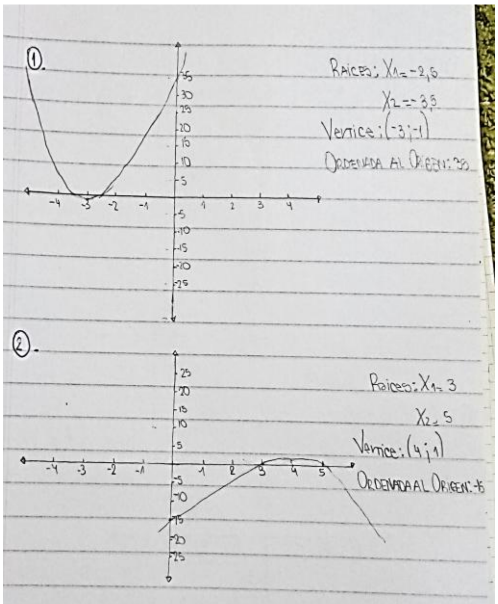
Producción N°4: La gráfica de a función sobre la que se trabaja empieza, pero no se termina, está incompleta.

Producciones de los alumnos con respecto a la actividad 6)

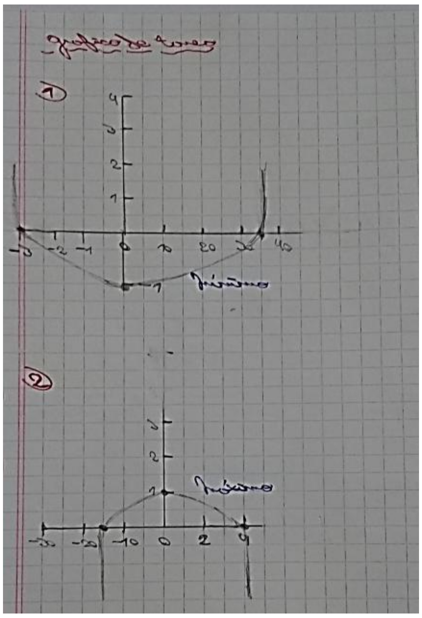
Producción N°1:

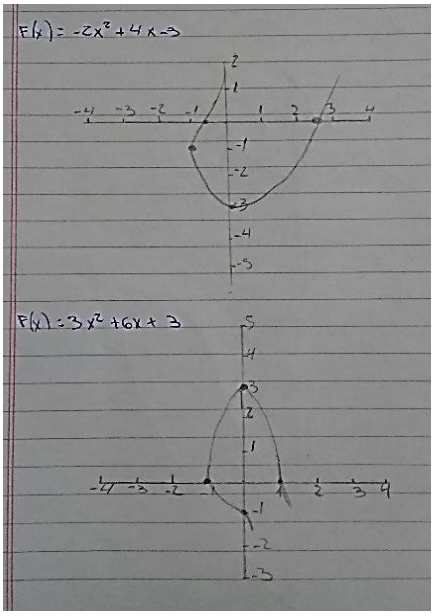






Producción N°2 y N° 3 con respecto a las gráficas:





Análisis de las producciones de los alumnos

Producción N°1: El trabajo está muy completo, ordenado y prolijo. Utiliza de manera adecuada la información que ofrece cada función cuadrática en sus diferentes formas. Esto significa que tiene un buen manejo de los datos que ofrece cada función y qué puedo hacer a partir de ellos. La representación gráfica de las funciones es correcta.

Producción N°2 con respecto a las gráficas: En la búsqueda de los vértices realiza un buen trabajo, pero no logra ubicarlos correctamente en el plano cartesiano por ende la representación gráfica de dichas funciones cuadráticas no son correctas. Arrastra error

Producción N°3 con respecto a las gráficas: Logra ubicar correctamente algunos puntos notables de las funciones cuadráticas, pero no alcanza a identificar visualmente cuál es el vértice. Considera al vértice como la ordenada al origen. Debido a ello, la representación gráfica de las funciones no es correcta.

Bibliografía

Gobierno de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa (2014). *Pensar la enseñanza, tomar decisiones*. *Educación secundaria. Ciclo básico*. Recuperado de: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/documentos/PensarLaEnsenanza-EducSecundaria-CicloBasico.pdf

Gobierno de La Pampa. Ministerio de Cultura y Educación. Subsecretaría de Coordinación (2013). *Materiales Curriculares de Matemática: Ciclo Orientado de la Educación Secundaria.* Recuperado de: https://www.fhumanas.com.ar/pluginfile.php?file=%2F1816%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FDISE%C3%91OS%20CURRICULARES%20LA%20PAMPA.pdf

Van Cauwenberghe N.G. (2016). *Proyecto Anual de Matemática Tercer año*. Recuperado de: https://es.slideshare.net/nancygisel/proyecto-anual-de-matemtica-para-tercer-ao-creacin-en-2016